

ОБОБЩЕННЫЕ ГИБРИДНЫЕ МАСШТАБНО-ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ (продолжение обзора)

С.В. Дворников^{1*}

¹Военная академия связи имени Маршала Советского Союза С.М. Буденного,
Санкт-Петербург, 194064, Российская Федерация
*Адрес для переписки: practcdsv@yandex.ru

Информация о статье

УДК 621.391

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Дворников С.В. Обобщенные гибридные масштабнo-частотно-временные распределения в частотно-временном пространстве: продолжение обзора // Труды учебных заведений связи. 2018. Т. 4. № 4. С. 20–35. DOI:10.31854/1813-324X-2018-4-4-20-35

Аннотация: Представлен обзор теоретических основ синтеза гибридных распределений, являющихся обобщенными представлениями по отношению к частотно-временным распределениям класса Козна и масштабнo-временным распределениям аффинного класса. Проанализирована методология синтеза и показана их общность по отношению к известным формам совместных описаний плотности распределения энергии в частотно-временном пространстве. Доказана теоретическая состоятельность гибридных форм, получивших название масштабнo-частотно-временные распределения. Обобщены аналитические подходы к их синтезу и представлены высокопроизводительные аналитические алгоритмы, адаптированные к методологии цифровой обработки сигналов. Приведены аналитические выражения и результаты экспериментов по обработке сигналов с высокой нестационарностью поведения их параметров на интервале наблюдения.

Ключевые слова: масштабнo-временные распределения, методы обработки сигналов с высокой нестационарностью параметров, распределения аффинного класса и класса Козна, гибридные распределения.

Введение

В предыдущих обзорах в [1–3] достаточно подробно были представлены теоретические основы синтеза билинейных частотно-временных распределений (ЧВР) и масштабнo-временных распределений (МВР) спектральной плотности энергии, представляющего собой научно-методический аппарат исследования, так называемой, тонкой структуры процессов с высокой степенью нестационарности поведения их параметров в ограниченном частотно-временном пространстве.

Рассмотрены этапы становления теории билинейных распределений в контексте работ таких выдающихся ученых как Cohen L., Claasen T.A.C.M., Meulenbrauker W.F.G., Bertrand J., Bertrand P., Flandrin P., Mallat S.G. [4–8]. Элементы данной теории, благодаря работам Grossmann A., Morlet J., Baraniuk R., Goncalves P., Auger F., Rioul O., Coifman R., Meyer Y. Ovarlez J.-P. и др. [9–16], находят все более широкое применение в различных практических приложениях радиотехники. Настоящий обзор посвящен

освещению вопросов исследования общности между ЧВР и МВР, теоретические аспекты которого в разной степени представлены в [17–34].

Представление сигналов на основе обобщенных МВР аффинного класса

В [35] было обосновано применение для представления сигналов с высокой степенью нестационарности закона изменения мгновенной частоты, так называемой широкополосной функции неопределенности (ФН) $\chi_{\Delta}(a, \tau)$, учитывающей характер нелинейных инвариантных изменений сигнала:

$$\begin{aligned} \chi_{\Delta}(a, \tau) &= a^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} z(t) z^*(t/a - \tau) dt = \\ &= a^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{z}(v) \hat{z}^*(av) e^{j2\pi a\tau v} dv, \end{aligned} \quad (1)$$

здесь и далее * – знак комплексного сопряжения.

С физической точки зрения аналитическое представление (1) соответствует вейвлет-преобразованию аналитического сигнала, в котором в качестве базисного вейвлета выступает сам сигнал. Однако проблема практического применения описания (1) связана с его несимметричной формой, которая приводит к искажениям результирующего представления описываемого процесса в частотно-временном пространстве. Для получения симметричной формы $\chi_{\Delta}(a, \tau)$ определим параметр масштаба следующим образом [21]:

$$a = (1 + \kappa/2) (1 - \kappa/2), \quad (2)$$

тогда:

$$\chi_{\Delta}^s(\kappa, \tau) = \sqrt{1 - \kappa^2/4} \times \int_{-\infty}^{\infty} z \left(\left(1 + \frac{\kappa}{2}\right)t + \frac{\tau}{2} \right) \times \int_{-\infty}^{\infty} z^* \left((1 - \kappa/2)t - \tau/2 \right) dt \quad (3)$$

Внутреннее наполнение интеграла (3) представляет собой корреляционное ядро функции Вигнера [36]. Следовательно, в терминах ЧВР Вигнера выражение (3) можно записать как:

$$\chi_{\Delta}^s(\kappa, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 - \kappa^2/4} \rho_w(t, v) \times e^{j2\pi(\tau + \kappa t)v} dv dt \quad (4)$$

Вместе с тем, в теории частотно-временного анализа в [35] установлена жесткая связь между ЧВР Вигнера и узкополосной ФН. Очевидно, что аналогичное соответствие можно получить и для МВР аффинного класса. Так, анализ аналитического распределения (4), проведенный в [21] показал, что для этого необходимо применить процедуру преобразования Фурье (ПФ) по отношению к переменной групповой задержки и преобразование Меллина по отношению к переменной параметра управления функцией групповой задержки:

$$\omega_z(v, t) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\Delta}^s(\kappa, \tau) \times e^{-j2\pi v \tau} \kappa^{j2\pi t - 1} d\tau d\kappa \quad (5)$$

Заметим, что выбор в полученном масштабнo-временном представлении (5) значения $v = v_0/a$ (например, по отношению к Герцу: при $v_0 = 1$ Гц) позволяет получить одну из форм аффинного распределения Бертранда [37]:

$$\omega_B(a, t) = v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u/2}{\sinh(u/2)} \hat{z} \left(\frac{vu \exp(-u/2)}{2 \sinh(u/2)} \right) \times \hat{z}^* \left(\frac{vu \exp(u/2)}{2 \sinh(u/2)} \right) e^{j2\pi v u t} du \quad (6)$$

С позиций теории аффиноров [38] распределение вида (6) является более общим по отношению к классической форме МВР Бертранда [6]:

$$\omega_B(a, t) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v/2}{\sinh(v/2)} \hat{z} \left(\frac{v \exp(-v/2)}{2 \sinh(v/2)} \right) \times \hat{z}^* \left(\frac{v \exp(v/2)}{2 \sinh(v/2)} \right) e^{j2\pi v t/a} dv \quad (7)$$

В выражениях (6) и (7) приняты обозначения:

$\sinh(v/2) = \frac{\exp(v/2) - \exp(-v/2)}{2}$ – гиперболический синус; \hat{z} – сглаженная форма (посредством фильтрации) исходного сигнала z .

Следовательно, представление на основе выражения (6) инвариантно к более широкому классу разновидностей аффинных сдвигов.

Указанное расширение свойства инвариантности достигается за счет введения дополнительно аффинного параметра. Так, если обычно аффинор определяется через геометрические параметры a и b , то в рассматриваемом случае имеет место еще один параметр – c . При этом вносимое им влияние на аффинный сдвиг распределения можно определить следующим образом:

$$\hat{z}(v) \rightarrow \hat{z}_g(v) = \sqrt{|a|} e^{-j2\pi(vb + c \ln(v))} \hat{z}(av), \quad (8)$$

где $g = (a, b, c)$ – аффинный функционал, показывающий число управляемых параметров сдвига.

Тогда в терминах выражения (8) обобщенное представление МВР Бертранда представим в следующем виде:

$$\omega_B \rightarrow \omega_B^g(v, t) = \omega_B \left(\frac{t - b - c/v}{a}, av \right). \quad (9)$$

Рассмотренный подход позволяет предположить о возможности его применимости ко всем МВР аффинного класса.

При этом характер изменений будет определять закон изменения параметра c . В [12, 14] исследованы основные законы изменения c :

$$\hat{z}(v) \rightarrow \hat{z}_g(v) = \sqrt{|a|} e^{-j2\pi(vb + c v^k)} \hat{z}(av), \quad (10)$$

для $k \neq 0, 1$,

$$\hat{z}(v) \rightarrow \hat{z}_g(v) = \sqrt{|a|} e^{-j2\pi(vb + c \ln(v))} \hat{z}(av), \quad (11)$$

для $k = 0$,

$$\hat{z}(v) \rightarrow \hat{z}_g(v) = \sqrt{|a|} e^{-j2\pi(vb + c v \ln(v))} \hat{z}(av), \quad (12)$$

для $k = 1$.

В результате закон инвариантности синтезированных распределений будет определяться соответствующим выбором k .

Вместе с тем следует отметить, что рассмотренный подход к синтезу МВР не является единственным. В частности, более продуктивным направлением

ем развития теории аффинных распределений, с точки зрения построения практических алгоритмов, видится использование порождающих распределений для создания МВР с требуемыми свойствами.

Поскольку функция Вигнера обладает свойством предельной концентрации сигнальной энергии в континууме точек мгновенных частот [4], то именно ее целесообразно положить в основу порождающего распределения и для аффинного класса. А для придания формируемому на ее основе распределению свойств аффинной инвариантности в [11] предложено параметр частоты в функции Вигнера связать с унитарной масштабирующей функцией следующим образом:

$$\bar{\lambda}(u) = \frac{-u}{\exp(-u) - 1}, \quad (13)$$

которая будет определять свойства аффинной инвариантности распределения. Сформированное таким образом МВР называется аффинным распределением Бертранда.

В аффинном классе оно является основополагающим (как функция Вигнера в распределениях класса Коэна) и определяется выражением [21]:

$$\varpi_B(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f \bar{\mu}(u) \hat{z}(\bar{\lambda}(u)f) \hat{z}^*(\bar{\lambda}(-u)f) \times \exp(j2\pi\bar{\chi}(u)tf) du, \quad (14)$$

где $\bar{\mu}(u)$ – функция, определяющая баланс аффинного распределения Бертранда и обладающая следующими свойствами [11, 18]:

$$\bar{\mu}(u) = \sqrt{[\bar{\lambda}(u)\bar{\lambda}(-u)] \frac{d\bar{\chi}(u)}{du}}, \quad (15)$$

$$\bar{\chi}(u) = \bar{\lambda}(u) - \bar{\lambda}(-u).$$

Учитывая, что $\bar{\chi}(u) = \bar{\lambda}(u) - \bar{\lambda}(-u) = u$, значение (15) упрощается к виду:

$$\bar{\mu}(u) = \sqrt{[\bar{\lambda}(u)\bar{\lambda}(-u)]}. \quad (16)$$

Важной особенностью выражения (14) является то, что оно, помимо масштабно-временной инвариантности, удовлетворяет свойствам сохранения унитарности, частотных маргиналов и преобразования Меллина [16].

Следует отметить, что в общем случае представление (14) адекватно аналитической форме (7), поэтому оно также позволяет в частотно-временной области локализовать сигналы с гиперболическим законом изменения мгновенной частоты и групповой задержки.

По своей сути, аффинное распределение Бертранда представляет спектр от частотно-зависимой корреляции сигнала, управляемой функцией $\bar{\lambda}(u)$. Поэтому оно, наряду с положительными свойствами

функции Вигнера, сохраняет и его недостатки, ограничивающие непосредственное использование в практических приложениях [36]. Во-первых, необходимость интегрирования в бесконечных пределах для вычисления значения распределения в заданной точке. Во-вторых, наличие интерференционного фона, возникающего при обработке не только многокомпонентных сигналов с высокой степенью нестационарности параметров, но и более простых, фазоманипулированных (ФМн) сигналов (рисунок 1).

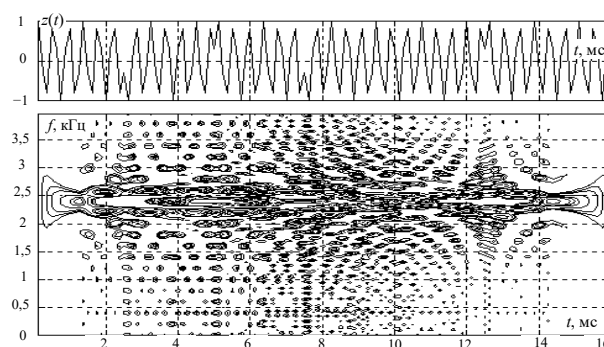


Рис. 1. Фрагмент аффинного распределения Бертранда тестового фазоманипулированного сигнала

Необходимо отметить, что аналитическая структура выражения (14) весьма неудобна с точки зрения синтеза на его основе практических алгоритмов обработки сигналов. Поэтому в рамках поиска пути разрешения указанной проблемы, проведенного в [21], были выявлены следующие моменты:

1) корреляционное ядро аффинного распределения Бертранда имеет аффинную инвариантность, свойственную вейвлет-функциям;

2) переход во временную область интегрирования с использованием функции-окна позволит от корреляции сигнала перейти к корреляции масштабограмм (модуль вейвлет-преобразования).

Представим метод формирования МВР Бертранда в виде теоремы 1, учитывая, что интегральное вейвлет-преобразование на основе широкополосной вейвлет-функции $\psi(\tau) = h_0(\tau) \exp(j2\pi\tau t)$ имеет вид [18, 21, 36]:

$$W_\psi(f, t) = \frac{1}{\sqrt{f}} \int_0^\infty \hat{z}(v) \hat{\Psi}^*(v/f) \exp(j2\pi vt) dv = \sqrt{f} \int_0^\infty z(\tau) \hat{\Psi}^*(f(\tau - t)) d\tau. \quad (17)$$

Теорема 1.

Синтез билинейного псевдо МВР Бертранда сигнала $z(t)$ возможен на основе аффинной корреляции его масштабограммы с ее комплексно сопряженной копией.

Доказательство.

Преобразуем выражение аффинного распределения Бертранда:

$$\varpi_B(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f \bar{\mu}(u) \hat{z}(\bar{\lambda}(u)f) \hat{z}^*(\bar{\lambda}(-u)f) \times \exp(j2\pi\bar{\chi}(u)tf) du$$

с учетом того, что $\bar{\mu}(u) = \sqrt{[\bar{\lambda}(u)\bar{\lambda}(-u)]}$ и $\bar{\chi}(u) = \bar{\lambda}(u) - \bar{\lambda}(-u) = u$, к следующему виду:

$$\varpi_B(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f \sqrt{[\bar{\lambda}(u)\bar{\lambda}(-u)]} \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} z(\tau') \exp(-j2\pi\bar{\lambda}(-u)f(\tau' - t)) d\tau' \right] \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) \exp(-j2\pi\bar{\lambda}(-u)f(\tau - t)) d\tau \right] \exp(j2\pi t f u) du.$$

Теперь ограничим временной интервал обработки полученного выражения путем использования функции-окна h_0 . Далее, для обеспечения ей частотной зависимости (характерной для распределения Бертранда) свяжем h_0 с $\bar{\lambda}(u)$ следующим образом: $h_0(\bar{\lambda}(u)f(\tau - t))$. Тогда:

$$\begin{aligned} \tilde{\varpi}_B(f, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f \sqrt{\bar{\lambda}(-u)} \times \\ &\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} z(\tau') h_0^*[\bar{\lambda}(-u)f(\tau' - t)] \times \right. \\ &\times \exp(-j2\pi\bar{\lambda}(-u)f(\tau' - t)) d\tau' \left. \right]^* \times \\ &\times \sqrt{\bar{\lambda}(u)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) h_0[\bar{\lambda}(u)f(\tau - t)] \times \right. \\ &\times \exp(-j2\pi\bar{\lambda}(-u)f(\tau - t)) d\tau \left. \right] \times \exp(j2\pi t f u) du. \end{aligned}$$

Далее внутреннее произведение $h_0^*[\bar{\lambda}(-u)f(\tau' - t)] \exp(-j2\pi\bar{\lambda}(-u)f(\tau' - t))$ полученного распределения представим в виде произведения вейвлет-функций в соответствии с их аналитическим описанием $\psi(\tau) = h_0(\tau) \exp(j2\pi\tau)$. Учитывая характер внесенных изменений, синтезируемое распределение запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\varpi}_B(f, t) &= f \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\bar{\lambda}(-u)} \times \\ &\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} z(\tau') \psi^*[\bar{\lambda}(-u)f(\tau' - t)] d\tau' \right] \times \\ &\times \sqrt{\bar{\lambda}(u)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) \psi[\bar{\lambda}(u)f(\tau - t)] d\tau \right] \exp(j2\pi t f u) du. \end{aligned}$$

Затем преобразуем полученное выражение к виду, характерному для вейвлет-преобразований:

$$\begin{aligned} \tilde{\varpi}_B(f, t) &= f \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{\bar{\lambda}(-u)} \times \right. \\ &\times \left. \left[\int_{-\infty}^{\infty} z(\tau') \psi^*[\bar{\lambda}(-u)f(\tau' - t)] d\tau' \right] \right] \times \\ &\times \left[\sqrt{\bar{\lambda}(u)} \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) \psi[\bar{\lambda}(u)f(\tau - t)] d\tau \right] \exp(j2\pi t f u) du. \end{aligned}$$

Если $W_\psi(f, t) = \sqrt{f} \int_0^\infty z(\tau) \hat{\psi}^*(f(\tau - t)) d\tau$, перепишем выражение в следующем виде:

$$\tilde{\varpi}_B(f, t) = f \int_{-\infty}^{\infty} W_\psi^*(\bar{\lambda}(-u)f, t) \times W_\psi(\bar{\lambda}(u)f, t) \exp(j2\pi t f u) du. \quad (18)$$

Очевидно, что основой выражения (18) являются масштабogramмы $W_\psi^*(\bar{\lambda}(-u)f, t)$, $W_\psi(\bar{\lambda}(u)f, t)$. Хотя распределение (18), в отличие от (14), и сохраняет вычислительную сложность, но оно вполне удобно для применения в практических алгоритмах, учитывая, что процедуры вейвлет-преобразования сравнительно легко реализуются методами цифровой обработки сигнала.

Введение функции-окна для распределений класса Коэна наделяет их новыми свойствами, переводя последние в класс псевдораспределений [1-5]. Учитывая полную адекватность механизма синтеза МВР вида (18), его можно определить как псевдоаффинное распределение Бертранда.

В псевдораспределениях использование h_0 позволяет подавлять интерференционный фон в частотном направлении. Следовательно, введение окна $g_t(v)$ в (18) дает возможность дополнительно подавить интерференционный фон и во временном направлении (здесь с учетом характера преобразования целесообразно использовать частотный образ функции-окна $\hat{g}_t(u)$):

$$\tilde{\varpi}_B(f, t) = f \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_t(u) W_\psi^*(\bar{\lambda}(-u)f, t) \times W_\psi(\bar{\lambda}(u)f, t) \exp(j2\pi t f u) du. \quad (19)$$

Выражение вида (19) является сглаженным аффинным псевдораспределением Бертранда. На рисунке 2 представлен фрагмент тестового ФМн-сигнала на основе распределения (19). В отличие от МВР Бертранда (14), его сглаженное псевдопредставление позволяет не только подавить интерференционный фон, но и подчеркнуть тонкую структуру сигнала в моменты смены фазы.

Таким образом, сглаженное аффинное псевдораспределение Бертранда (19) уже можно рассматривать в качестве инструмента анализа, позволяющего получать адекватные представления

сигналов со сложной частотно-временной структурой и высокой степенью нестационарности поведения их параметров в частотно-временном пространстве.

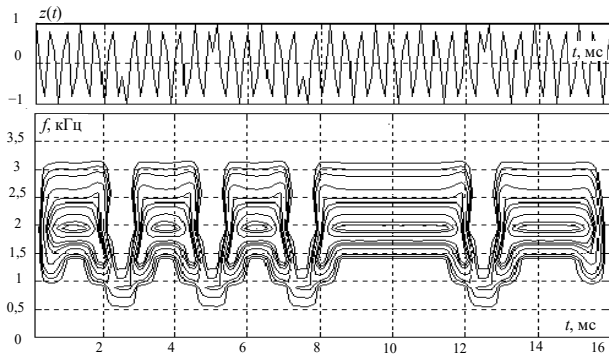


Рис. 2. Сглаженное аффинное псевдораспределение Бертранда тестового фазоманипулированного сигнала

Очевидно, что свойства распределения (19) во многом определяются видом функции $\hat{g}_t(u)$ и типом материнского вейвлета. Исходя из этого, решение (19) с позиций аналитического уравнения в ряде случаев может быть неоднозначным. Так, для ЧВР класса Коэна получена компактная запись для обобщенного частотно-временного представления сигналов [1], позволяющая синтезировать из функции Вигнера любое билинейное распределение с заданными свойствами. В интересах получения аналогичного выражения для МВР аффинного класса на основе функции Бертранда используем следующее выражение, полученное в [3]:

$$|\varpi_M(a, t; \Pi)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_W(\xi, v) W_{\Psi}\left(\frac{v-t}{a}, a\xi\right) dv d\xi. \quad (20)$$

Заметим, что основу выражения (20) составляет функция Вигнера, а в качестве ядра преобразования выступает интегральное вейвлет-преобразование, определяющее аффинную инвариантность результирующего значения.

Учитывая, что в аффинной функции Бертранда указанные операции включены в саму структуру распределения, то обобщенное выражение приобретает следующий вид [21, 36]:

$$\tilde{\omega}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \varpi_B(\tau, v) \Pi\left(v(\tau-t), \frac{v}{f}\right) dv d\tau, \quad (21)$$

где Π является аффинным ядром преобразования.

Учитывая билинейную общность аффинных распределений с частотно-временными представлениями класса Коэна, можно предположить о возможности восстановления исходного сигнала из его масштабно-временного распределения [21].

Теорема 2.

Билинейная аффинная корреляция распределения Бертранда сигнала с его распределением формирующего вейвлета дает масштабодиаграмму исходного сигнала.

Доказательство.

Рассмотрим выражение:

$$\varpi_B(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f \bar{\mu}(u) \hat{z}(\bar{\lambda}(u)f) \times \hat{z}^*(\bar{\lambda}(-u)f) \exp(j2\pi\bar{\chi}(u)tf) du.$$

Возьмем от него преобразование Фурье, положив при этом $\gamma = tf$, т. е. $t = \gamma/f$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varpi_B(f, \gamma/f) e^{-j2\pi\gamma\varsigma} d\gamma = \bar{\mu}(\varsigma) \hat{z}(\bar{\lambda}(\varsigma)f) \hat{z}^*(\bar{\lambda}(-\varsigma)f) f.$$

Затем в выражении:

$$\hat{\omega}_B(f, t) = f \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_t(u) W_{\Psi}^*(\bar{\lambda}(-u)f, t) \times W_{\Psi}(\bar{\lambda}(u)f, t) \exp(j2\pi\bar{\chi}(u)tf) du \quad (21a)$$

представим интегральное вейвлет-преобразование, с учетом его формирования в частотной области, следующим образом:

$$W_{\Psi}(f, t) = \sqrt{f} \int_0^{\infty} z(\tau) \hat{\Psi}^*(f(\tau-t)) d\tau. \quad (21б)$$

Внесем полученное в выражения (21б) и (21а):

$$\hat{\omega}_B(f, t) = f^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}_t(u)}{\bar{\mu}(u)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{z}(v) \hat{z}^*(\varsigma) \times \hat{\Psi}^*\left(\frac{v}{f\bar{\lambda}(u)}\right) \hat{\Psi}\left(\frac{\varsigma}{f\bar{\lambda}(-u)}\right) \times \exp[j2\pi\bar{\chi}(u)t(v-\varsigma)] dv d\varsigma du. \quad (21в)$$

В полученном выражении (21в) сделаем замену переменных:

$$v = \eta \bar{\lambda}(\vartheta), \quad \varsigma = \eta \bar{\lambda}(-\vartheta), \\ \frac{d(v, \varsigma)}{d(\eta, \vartheta)} = \eta \bar{\lambda}(\vartheta) \bar{\lambda}(-\vartheta) = \eta \bar{\mu}^2(\vartheta),$$

в результате чего получим:

$$\hat{\omega}_B(f, t) = f^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_t(u) \frac{\bar{\mu}(\vartheta)}{\bar{\mu}(u)} \times [\eta \bar{\mu}(\vartheta) \hat{z}(\bar{\lambda}(\vartheta)\eta) \hat{z}^*(\bar{\lambda}(-\vartheta)\eta)] \times \hat{\Psi}^*\left(\frac{\eta \bar{\lambda}(\vartheta)}{f\bar{\lambda}(u)}\right) \hat{\Psi}\left(\frac{\eta \bar{\lambda}(-\vartheta)}{f\bar{\lambda}(-u)}\right) \times \exp[j2\pi\bar{\chi}(\vartheta)t\eta] d\eta d\vartheta du. \quad (21г)$$

Заметим, что внутреннее произведение выражения (21г) (в квадратных скобках) аналогично правой части исходного преобразованного уравнения:

$$\eta \bar{\mu}(\vartheta) \hat{z}(\bar{\lambda}(\vartheta)\eta) \hat{z}^*(\bar{\lambda}(-\vartheta)\eta) \Leftrightarrow \bar{\mu}(\varsigma) \hat{z}(\bar{\lambda}(\varsigma)f) \hat{z}^*(\bar{\lambda}(-\varsigma)f)f.$$

Тогда, воспользовавшись заменой $\gamma = \eta\tau$, получаем ядро выражения для сглаженного аффинного псевдораспределения Бертранда (без корреляции сигнала), т. е. ядро преобразования:

$$\Pi(\eta, \tau) = \eta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_t(u) \frac{\bar{\mu}(\vartheta)}{\bar{\mu}(u)} \hat{\Psi}^* \left(\frac{\eta \bar{\lambda}(\vartheta)}{\bar{\lambda}(u)} \right) \times \hat{\Psi} \left(\frac{\eta \bar{\lambda}(-\vartheta)}{\bar{\lambda}(-u)} \right) \exp(j2\pi \bar{\chi}(\vartheta)\tau\eta) dud \vartheta.$$

Теперь, если $\hat{g}_t(u) = \delta(u)$ (т. е. определить ядро как $\Pi = \varpi_{\Psi}$), то при подстановке его в выражение (21) получим выражение для масштабogramмы аффинного класса:

$$|W_{\Psi}(f, t)|^2 = \int \int_0^{\infty} \varpi_B(\tau, \eta) \times \varpi_{\Psi} \left(\eta(\tau - t), \frac{\eta}{f} \right) d\eta d\tau,$$

Выводящее конечное выражение:

$$|W_{\Psi}(f, t)|^2 = \int \int_0^{\infty} \varpi_B(\tau, \eta) \times \varpi_{\Psi} \left(\eta(\tau - t), \frac{\eta}{f} \right) d\eta d\tau, \tag{22}$$

впервые получено в [36], поэтому теорему 2 целесообразно определить как условие обратимости аффинных распределений Гонсалеса–Бараньюка.

С точки зрения синтеза практических алгоритмов обработки сигналов форма (22) видится наиболее удобной. Более того, анализ свойств распределений, получаемых на ее основе, указывает на ее гибридную природу [21], поскольку в ней объединяются характеристики функции Вигнера, на основе которой было построено выражение, и параметры вейвлет-преобразования, которое явилось основой формирования конечного аналитического выражения.

Таким образом, можно заключить, что аффинное представление (22) приобретает помехоустойчивость вейвлет-преобразований при сохранении свойства высокой концентрации энергии в континууме точек мгновенных частот, в общем случае составляющих анализируемого процесса.

Таким образом, аналогичность подхода к синтезу распределений аффинного класса и класса Коэна позволяет предположить о единой природе

указанных представлений, а значит, возможен их синтез на базе единой структурной основы.

Следует отметить, что практическая направленность научного результата возможна лишь в том случае, если получены относительно простые алгоритмы его реализации. Если для класса Коэна в качестве таковых выступают алгоритмы на основе корреляции спектрограмм, то естественно предположить, что для аффинного класса таковыми будут алгоритмы, базирующиеся на вейвлет-преобразованиях.

Поскольку аффинные свойства в МВР Бертранда определяет функция $\bar{\lambda}(u)$ (13), то, переопределив закон изменения масштаба, можно получить семейство аналогичных функций и тем самым расширить класс аффинных представлений.

В [21] предложен следующий вид масштабирующей функции $\bar{\lambda}(u)$ (в принципе, можно определить любое взаимосвязанное семейство [36]):

$$\bar{\lambda}_k(u) = \left(k \frac{\exp(-u) - 1}{\exp(-ku) - 1} \right)^m, \tag{23}$$

где $m = \frac{1}{k-1}$; $k \neq 0, 1$.

Соответствующим образом трансформируются и свойства функции, поскольку $\bar{\lambda}_k(u)$ теперь зависит как от частоты, так и от величины масштабного индекса k (рисунок 3).

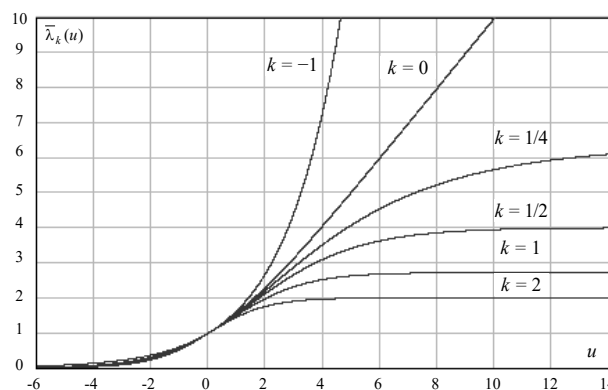


Рис. 3. Унитарная масштабирующая аффинная функция при различных значениях k

Таким образом, имеем:

$$\bar{\lambda}_k(-u) = \exp(-u) \bar{\lambda}_k(u), \tag{24}$$

$$\bar{\chi}_k(u) = \bar{\lambda}_k(u) - \bar{\lambda}_k(-u). \tag{25}$$

Раскрывая пределы в (23) для $k = 0$ и $k = 1$, соответственно получим:

$$\bar{\lambda}_0(u) = \frac{u}{1 - \exp(-u)}, \tag{26}$$

$$\bar{\lambda}_1(u) = \exp \left(1 + \frac{u \exp(-u)}{\exp(-u) - 1} \right).$$

Анализ поведения функции $\bar{\lambda}_k(u)$, проведенный в [21], показывает, что выбор масштабного индекса $k > 2$ нецелесообразен, поскольку общий характер изменений самой масштабирующей функции практически остается на уровне, соответствующем ее значениям при $k = 2$ (начиная с $u = 3$ функция постоянна при незначительном уменьшении абсолютного значения с возрастанием k). В тоже время любое увеличение масштабирующего индекса ведет к значительному усложнению алгоритма синтеза.

Напротив, при $k < -1$ происходит резкое возрастание $\bar{\lambda}_k(u)$ при любом незначительном увеличении u . Результирующее МВР становится излишне чувствительным к любому, даже незначительному изменению анализируемой частоты. Поэтому при обработке сигналов с резкими изменениями мгновенных частот для адекватного отражения на масштабнo-временнoй плоскости их распределений возникает необходимость в обработке больших временных входных массивов, что тоже ведет к снижению практической ценности алгоритмов.

Так, на рисунке 4 представлены результаты зависимости промежуточного параметра $\bar{\chi}_k$ от u при различных значениях k .

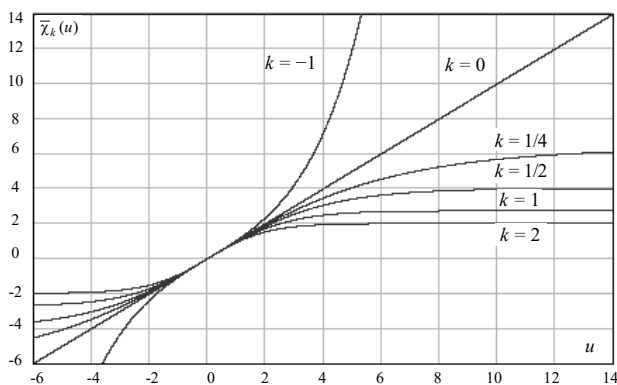


Рис. 4. Зависимость параметра $\bar{\chi}_k$ от u

Характер поведения $\bar{\chi}_k$ указывает на ее симметричность относительно $u = 0$. Следовательно, с точки зрения математической обработки для монотонных на интервале анализа процессов (или сигналов с достаточно стационарным характером поведения параметров) вычисления можно проводить и в обратном относительно фиксированного момента направлении.

С учетом обобщенного представления масштабирующей функции (23) перепишем выражение (14) в более обобщенном виде:

$$\varpi_z^{(k)}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f \bar{\mu}_k(u) \hat{z}(\bar{\lambda}_k(u)f) \times \hat{z}^*(\bar{\lambda}_k(-u)f) \exp(j2\pi f \bar{\chi}_k(u)t) du. \quad (27)$$

Очевидно, что масштабирующая функция $\bar{\lambda}_k(u)$ наделяет исходное представление (14) дополнительными свойствами инвариантности с логарифмической зависимостью групповой задержки распределения:

$$\begin{aligned} \hat{z}(f) &\rightarrow \exp(-j2\pi\Phi_k(f)) \hat{z}(f) \\ \downarrow &\quad \downarrow \\ \varpi_z^{(k)}(f, t) &\rightarrow \varpi_z^{(k)}\left(t - \frac{d}{df}\Phi_k(f), f\right). \end{aligned} \quad (28)$$

В [36] она представлена как инвариантность с логарифмической зависимостью групповой задержки, определяемой значением индекса k .

Вид фазового спектра $\Phi_k(f)$ в (28) для различных k определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_k(f) &= cL_k f^k \text{ при } k \neq 0, 1, \\ \Phi_k(f) &= c(L_0 + kd_0 \ln(f)) \text{ при } k = 0, \\ \Phi_k(f) &= cf(L_1 + \ln(f)) \text{ при } k = 1, \end{aligned} \quad (29)$$

где c, d_0, k, L_k – нормирующие константы, определяемые условиями формирования спектра [7].

Таким образом, индекс k является параметром, который фактически задает геометрическую структуру распределения (27).

В свою очередь функция $\bar{\mu}_k$ управляет степенью локализации и его унитарными свойствами, т.е. качественно определяет возможные маргиналы. Поскольку $\bar{\mu}_k$ в общем случае является произвольной функцией, то для каждого значения k можно построить бесчисленное количество МВР вида $\varpi_z^{(k)}(f, t)$, определяемых выражением (28).

Если предположить, что $k = 0$, то в этом случае получим $\bar{\lambda}_0(u) = \frac{u}{1 - \exp(-u)}$ и $\bar{\chi}_0(u) = u$. Так инвариантность формируемого МВР получает гиперболический закон изменения $t = \frac{d}{df}\Phi_0(f)$ при ∞f^{-1} . В этом случае $\bar{\mu}_0(u) = (\bar{\lambda}_0(u)\bar{\lambda}_0(-u))^{1/2}$.

В результате выражение (28) примет вид, аналогичный виду для МВР Бертранда (7) [6, 21]:

$$\begin{aligned} \varpi_z^{(0)}(f, t) &= f \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u/2}{\sinh(u/2)} \hat{z}\left(\frac{fu \exp(-u/2)}{2 \sinh(u/2)}\right) \times \\ &\times \hat{z}^*\left(\frac{fu \exp(u/2)}{2 \sinh(u/2)}\right) e^{j2\pi f u t} du. \end{aligned} \quad (30)$$

Анализ полученных результатов показывает, что МВР (7) представляет частный случай более общей формы описания (28) при частном выборе $k = 0$ для масштабирующей функции.

Действительно, предположив, что $k = 1/2$, и определив, что $\bar{\mu}_{1/2}(u) = 1 - \tanh^2(u)$, получим известное D -распределение Фландрина, закон изменения инвариантности в котором является пе-

реходной формой от квадратичного к гиперболическому виду [36].

При $k = -1$ и $\bar{\mu}_{-1}(u) = \cosh(u/2)$ получаем активную форму МВР Ундербергера. И хотя она в общем случае и не унитарна, тем не менее, ей присуще свойство локализации во времени и вдоль линии групповой задержки, изменяющейся по закону квадрата от гиперболической зависимости. [39]. Следует отметить, что при таком подходе МВР удовлетворяет свойствам образования на его основе частотных маргиналов.

Синтез выражения (28) при условии $k = \pm\infty$ дает распределение Маргенау-Хилла [14] с ярко выраженными частотными и временными маргиналами, обладающими хорошей локализацией во временной области. Учитывая пределы изменения $k = \pm\infty$, можно рассчитывать на получение дискретной формы описания.

При аналитическом синтезе отдельно формируются распределения $\varpi_z^{(-\infty)}(f, t)$ и $\varpi_z^{(+\infty)}(f, t)$, усреднение которых, в конечном счете, и позволяет получить искомую форму:

$$0,5 \left(\varpi_z^{(-\infty)}(f, t) + \varpi_z^{(+\infty)}(f, t) \right) = E \{ \varpi_U(f, t) \}.$$

Из всей совокупности возможных значений k особый интерес вызывает выбор $k = 2$. Анализ результатов, представленных на рисунках 3 и 4, показывает, что при $k = 2$ масштабирующая функция является линейной. Следовательно, такой выбор наделяет распределение (28) свойствами инвариантности, характерной для частотно-временных распределений класса Коэна.

В этом случае $t = \frac{d}{df} \Phi_2(f)$ при $\rightarrow \infty f$. Получаем $\bar{\lambda}_2(u) = 1 + \tanh(u/2)$ и $\bar{\chi}_2(u) = 2 \tanh(u/2)$.

Если:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_2(u) &= \left(\bar{\lambda}_2(u) \bar{\lambda}_2(-u) \frac{d}{dv} \bar{\chi}_2(u) \right)^{1/2} = \\ &= (1 - \tanh^2(u/2))^{1/2}, \end{aligned}$$

то, подставляя его в (28), получим:

$$\begin{aligned} \varpi_z^{(2)}(f, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f (1 - \tanh^2(u/2))^{1/2} \times \\ &\times K(f, u) \exp(j2\pi f 2 \tanh(u/2) t) du, \end{aligned} \quad (31)$$

где $K(f, u) = \hat{z}((1 + \tanh(\frac{u}{2}))f) \hat{z}^*((1 + \tanh(-\frac{u}{2}))f)$ – вплоть до некоторого множителя совпадает с классической формой ЧВР Вигнера в частотной области. Учитывая, что в его основе лежит МВР (28), выражение (31) целесообразно определить как распределение Вигнера аффинного типа или же гибридное распределение [21].

Указанное обстоятельство позволяет рассматривать ЧВР класса Коэна как подмножество более

общего класса аффинных распределений. Другими словами, аффинные распределения и распределения класса Коэна имеют единую природу. Следовательно, можно найти такое ядро, которое позволило бы синтезировать распределения только исходя из требуемых свойств, т.е. независимо от класса, к которому оно принадлежит.

Учитывая, что только функция Вигнера обладает свойством предельной концентрации энергии вдоль линий мгновенных частот, именно ее и следует положить в основу ядра. Такой выбор обусловлен наличием аффинной формы данного распределения. Очевидно, что синтезированные таким образом распределения будут носить гибридный характер.

По совокупности приобретенных свойств их целесообразно определить как гибридные масштабнo-частотно-временные описания функции плотности распределения энергии [21]. Тогда выражение (28) при $k = 2$ можно рассматривать как МВР Вигнера или просто аффинное распределение Вигнера [36]. Однако перед синтезом распределения следует проанализировать структуру интерференционных помех аффинных представлений.

Допустим, имеется два энергетических всплеска в точках ρ_1 с координатами (f_1, t_1) и ρ_2 с координатами (f_2, t_2) расположенных на траектории локализации распределения. Они создают помехи в любой точке частотно-временной плоскости, в том числе и в точке ρ_i с координатами (f_i, t_i) , расположенной на траектории групповой задержки сигнала (рисунок 5).

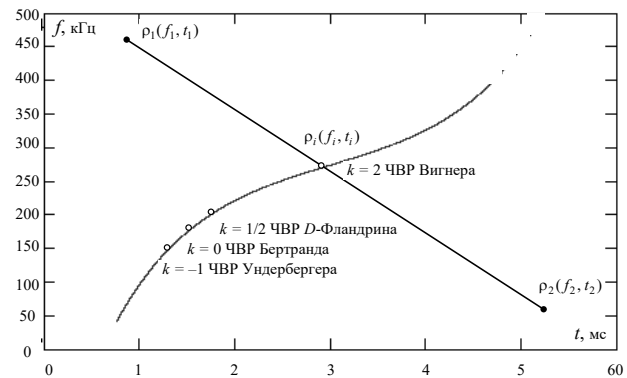


Рис. 5. Геометрическое место интерференционной помехи на линии групповой задержки сигнала, полученной от пучностей энергии, расположенных в точках ρ_1 и ρ_2 для различных значений k

Учитывая, что двухчастотные распределения локализованы вдоль линий их групповых задержек, рассчитываемых по формуле $t_z(v) = t_0 + cv^{k-1}$, можно показать, что координаты (f_i, t_i) при $\omega = v$ или $\omega = (t - t_0)^{\frac{1}{k-1}}$ определяются соотношением [7]:

$$\omega_i = \left(\frac{\omega_2^k - \omega_1^k}{k(\omega_2 - \omega_1)} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (32)$$

Вместе с тем анализ результатов, представленных на рисунке 5 позволяет сделать вывод, что значение масштабного индекса k во многом определяет место локализации интерференционных помех. Следовательно, учитывая характер аффинного распределения, можно с учетом расположения истинных сигнальных отчетов применением соответствующих фильтров локализовать интерференционный фон.

Важным моментом полученных результатов является то, что положение интерференционных компонент как для распределения Вигнера класса Коэна, так и для его аффинного аналога ($k = 2$) совпадает.

Таким образом, полученные теоретические исследования и данные практического эксперимента на основе компьютерного моделирования показали, что разработанный научно-методический аппарат, базирующиеся на обобщенные псевдоформы ЧВР и МВР позволяет получить адекватные описания сигналов. Следовательно, представленное направление адаптации аффинных распределений, основанное на использование сглаживающих оконных функций, является не только теоретически обоснованным, но и научно правомерным.

Сглаженные и псевдоформы аффинных распределений

Поскольку аффинные МВР по своей сути являются билинейными распределениями, то в формируемых на их основе представлениях присутствует интерференционный фон [5]. Очевидно, что для его подавления целесообразно использовать подходы аналогичные при формировании псевдо-МВР Бертранда, т.е. использовать функции-окна с частотно-зависимой полосой пропускания [3].

Тогда уравнение синтеза распределения в соответствии с (21) будет иметь следующий вид:

$$\tilde{\omega}_z(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \omega_B^{(2)}(\tau, \nu) \Pi\left(\nu(\tau - t) \frac{\nu}{f}\right) d\nu d\tau. \quad (33)$$

Практическая ценность распределения (33) состоит в том, что на его основе возможен синтез, как распределений аффинного класса, так и ЧВР класса Коэна. Все определяется только соответствующим выбором функции-окна.

С точки зрения положительных свойств различных форм распределений особый интерес представляют их сглаженные псевдоверсии. Поэтому, для получения базового уравнения, позволяющего синтезировать гибридные описания функции плотности распределения энергии, воспользуемся выражением (27). На базе указанной формулы уже возможен синтез функции Вигнера аффинного типа. Тогда, основываясь на фабуле теоремы 1, можно показать, что синтез сглаженных псевдоаффинных распределений сигнала $z(t)$

также возможен путем аффинной корреляции его масштабogramмы с ее комплексно сопряженной копией.

Теорема 3.

Синтез псевдораспределений аффинного класса сигнала $z(t)$ возможен путем взвешивания частотно-зависимой функцией-окном результата аффинной корреляции его масштабogramмы с ее комплексно сопряженной копией.

Доказательство.

Преобразуем выражение (33а):

$$\tilde{\omega}_z^{(k)}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f \bar{\mu}_k(u) \hat{z}(\bar{\lambda}_k(u)f) \times \times \hat{z}^*(\bar{\lambda}_k(-u)f) \exp(j2\pi f \bar{\lambda}_k(u)t) du \quad (33a)$$

к виду:

$$\tilde{\omega}_z^{(k)}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f \frac{\bar{\mu}_k}{\sqrt{[\bar{\lambda}_k(u)\bar{\lambda}_k(-u)]}} \times \times \sqrt{[\bar{\lambda}_k(u)\bar{\lambda}_k(-u)]} \times \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} z(\tau') \exp(-j2\pi \bar{\lambda}_k(-u)f(\tau' - t)) d\tau' \right]^* \times \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) \exp(-j2\pi \bar{\lambda}_k(-u)f(\tau - t)) d\tau \right] \times \times \exp(j2\pi f \bar{\lambda}_k(u)t) du. \quad (33б)$$

Ограничим временной интервал обработки в (33б) путем использования частотно-зависимой функцией-окна вида $h_0(\bar{\lambda}_k(u)f(\tau - t))$:

$$\tilde{\omega}_z^{(k)}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f \frac{\bar{\mu}_k}{\sqrt{[\bar{\lambda}_k(u)\bar{\lambda}_k(-u)]}} \times \times \sqrt{\bar{\lambda}_k(-u)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} z(\tau') h_0^*[\bar{\lambda}_k(-u)f(\tau - t)] \times \times e^{-j2\pi \bar{\lambda}_k(-u)f(\tau' - t)} d\tau' \right]^* \times \times \sqrt{\bar{\lambda}_k(u)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) h_0[\bar{\lambda}_k(u)f(\tau - t)] \times \times e^{-j2\pi \bar{\lambda}_k(u)f(\tau - t)} d\tau \right] \times \times e^{j2\pi f \bar{\lambda}_k(u)t} du. \quad (33в)$$

Внутреннее произведение в выражении (33в) $h_0^*[\bar{\lambda}_k(-u)f(\tau - t)] \exp(-j2\pi \bar{\lambda}_k(-u)f(\tau' - t))$ представим как произведение вейвлет-функций, в соответствии с их аналитическим описанием:

$$\psi(\tau) = h_0(\tau) \exp(j2\pi\tau),$$

тогда в соответствии с рассматриваемой фабулой результирующее синтезируемое распределение представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_z^{(k)}(f, t) = & f \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\mu}_k}{\sqrt{[\bar{\lambda}_k(u)\bar{\lambda}_k(-u)]}} \sqrt{\bar{\lambda}_k(-u)} \times \\ & \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} z(\tau') \Psi^* [\bar{\lambda}_k(-u) f(\tau' - t)] d\tau' \right]^* \times \\ & \times \sqrt{\bar{\lambda}_k(u)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) \Psi^* [\bar{\lambda}_k(u) f(\tau - t)] d\tau \right] \times \\ & \times \exp(j2\pi t f \bar{\chi}_k(u)) du. \end{aligned} \quad (33г)$$

Теперь запишем выражение (33г) с учетом:

$$W_{\Psi}(f, t) = \sqrt{f} \int_0^{\infty} z(\tau) \hat{\Psi}^*(f(\tau - t)) d\tau$$

как:

$$\tilde{\omega}_z^{(k)}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\mu}_k f}{\sqrt{[\bar{\lambda}_k(u)\bar{\lambda}_k(-u)]}} \times \quad (34)$$

$$\times W_{\Psi}^*(\bar{\lambda}_k(-u) f, t) W_{\Psi}(\bar{\lambda}_k(u) f, t) e^{j2\pi t f \bar{\chi}_k(u)} du.$$

Полученное выражение (34) можно трактовать как обобщенную форму псевдораспределения аффинного типа [21, 36]. Отметим, что использование в (34) функции-окна позволит подавить интерференционный фон только в частотном направлении.

Для подавления мешающих компонент и во временном направлении потребуются введение дополнительной узкополосной функции функции-окна для временной области:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_z^{(k)}(f, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_t(u) \frac{\bar{\mu}_k f}{\sqrt{[\bar{\lambda}_k(u)\bar{\lambda}_k(-u)]}} \times \\ & \times W_{\Psi}^*(\bar{\lambda}_k(-u) f, t) W_{\Psi}(\bar{\lambda}_k(u) f, t) e^{j2\pi t f \bar{\chi}_k(u)} du. \end{aligned} \quad (35)$$

Конечное выражение (35), в результате используемых процедур (по аналогии с (19)), можно определить как обобщенное сглаженное псевдораспределение аффинного типа.

Заметим, что в полученном уравнении (35) соответствующий выбор масштабирующего индекса позволяет синтезировать заданный тип распределения. С физической точки зрения функция (35) представляет сглаженный спектр от автокорреляции вейвлет-преобразования сигнала со своей зеркальной копией.

Аналитическое представление уравнения (35) удобно и с точки зрения практической реализации алгоритмов анализа. Поэтому его можно рассматривать в качестве базового выражения в средствах анализа сигналов со сложной частотно-временной структурой.

В [21] разработан метод формирования гибридных масштабнo-частотно-временных распределений, в основе которого лежит функция (35). Обоб-

щение его процедур формирования позволяет определить следующие этапы их реализации для представления сигналов на основе билинейных распределений аффинного класса:

1) оценивается характер изменения мгновенной частоты анализируемого процесса для выбора базового распределения (его вид определяется материнским вейвлетом);

2) осуществляется вейвлет-преобразование исходного процесса и его комплексно сопряженной копии;

3) рассчитывается нормирующий множитель для каждого уровня декомпозиции вейвлет-преобразования как отношение функции, определяющей баланс МВР, и унитарной аффинной функции;

4) вычисляется искомое распределение как результат нормирования скалярного произведения вейвлет-преобразования с его комплексно сопряженной величиной (копией), рассчитанной на этапе 3.

При необходимости дополнительного сглаживания искомого распределения во временном направлении можно воспользоваться ограничивающей функцией $\hat{g}_t(u)$. Для строгого доказательства состоятельности выражения (34) воспользуемся результатами, полученными при анализе свойств масштабирующей функции. А именно, при $k = 2$ $\bar{\lambda}_2(u) = 1 + \tanh(u/2)$ и $\bar{\chi}_2(u) = 2 \tanh(u/2)$ функция $\bar{\mu}_k$ определена следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_k(u) = & \left(\bar{\lambda}_2(u) \bar{\lambda}_2(-u) \frac{d}{du} \bar{\chi}_2(u) \right)^{1/2} = \\ & = (1 - \tanh^2(u/2))^{1/2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Рассмотрим в формуле (34) произведение сомножителей с учетом полученных значений:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\mu}_k(u)}{\sqrt{[\bar{\lambda}_k(u)\bar{\lambda}_k(-u)]}} = & \frac{\bar{\mu}_k(u)}{\sqrt{[\bar{\lambda}_k(u)\bar{\lambda}_k(-u)]}} = \\ = & \frac{\sqrt{1 - \tanh^2(u/2)}}{\sqrt{(1 + \tanh(u/2))(1 - \tanh(u/2))}} = \\ = & \frac{\sqrt{1 - \tanh^2(u/2)}}{\sqrt{1 - \tanh^2(u/2)}} = 1. \end{aligned} \quad (37)$$

Таким образом, выражение (35), с учетом (15), будет сведено к спектру корреляции вейвлет-преобразования сигнала (функция $\bar{\lambda}_2(u)$ ограничивает лишь частотную область анализа):

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_z^{(2)}(f, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} W_{\Psi}^*(\bar{\lambda}_k(-u) f, t) \times \\ & \times W_{\Psi}(\bar{\lambda}_k(u) f, t) e^{j2\pi t f u} du. \end{aligned} \quad (38)$$

Результат (38) соответствует ранее полученным данным, что позволяет судить о правомерности проведенных преобразований.

Оценка эффективности сглаженного псевдораспределения Вигнера аффинного типа, полученная в [36] позволяет судить о целесообразности его практического применения. В частности на рисунках 6 и 7 представлены фрагменты тестового сигнала (четырёхпозиционный частотно-манипулированный сигнал (ЧМн-4)), синтезируемые на основе выражений (19) и (35) при $k = 2$.

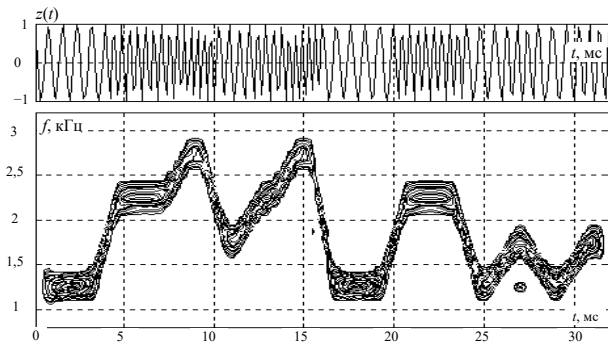


Рис. 6. Сглаженное аффинное псевдораспределение Бертранда сигнала ЧМн-4

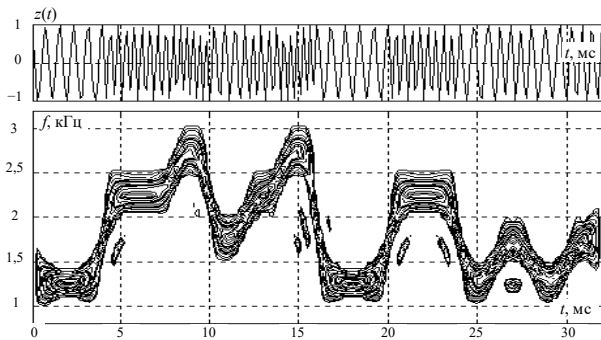


Рис. 7. Сглаженное аффинное псевдораспределение Вигнера сигнала ЧМн-4

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующий вывод. Сглаженное псевдораспределение Вигнера аффинного типа на основе выражения (35) позволяет существенно снизить вычислительные затраты при формировании частотно-временной матрицы обрабатываемого сигнала по отношению к МВР Бертранда. Данный факт объясняется сложностью вида масштабирующей функции в (19). В тоже время снижение вычислительных затрат в выражении (38) не приводит к значительному ухудшению метрологических характеристик формируемого гибридного МВР.

На рисунке 8 представлен график вычислительных затрат O в зависимости от числа формируемых частотных срезов J , величина которых определяется требуемой полосой анализа $\Delta F_{f_B - f_H}$, при вычислении выражения (19) по отношению к (38).

В то же время рисунок 9 демонстрирует относительное изменение ошибки измерения мгновенной частоты $\sigma_{отн}$ на основе псевдораспределения Вигнера аффинного типа по отношению к псевдораспределению Бертранда, в зависимости от числа срезов J .

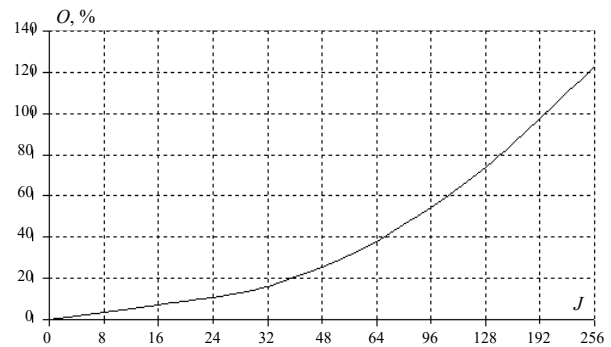


Рис. 8. Вычислительная сложность псевдораспределения Бертранда к псевдораспределению Вигнера аффинного типа от числа частотных срезов

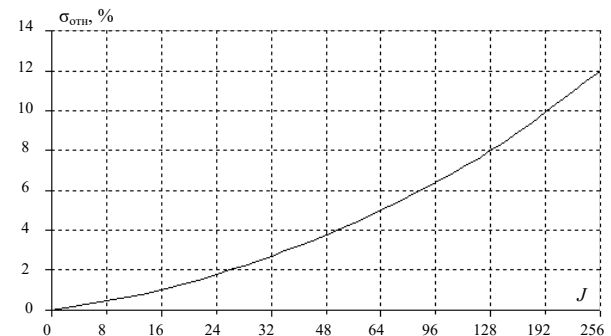


Рис. 9. Относительная ошибка измерения мгновенной частоты на основе псевдораспределения Вигнера аффинного типа к псевдораспределению Бертранда от числа формируемых частотных срезов

Полученные результаты подтверждают правомочность применения уравнения (33) в качестве базового для синтеза алгоритмов обработки сигналов. Для строгого доказательства того, что порождающая функция вида $\tilde{\omega}_z(f, t)$ является унитарной для выражения (33), в выражении (35) проведем следующую замену переменных:

$$\begin{cases} v = \bar{\lambda}_k(u)f; & v' = \bar{\lambda}_k(-u)f; \\ \text{с якобианом} & \frac{d(v, v')}{d(f, u)} = \bar{\lambda}_k(u)\bar{\lambda}_k(-u)f. \end{cases} \quad (39)$$

С учетом (39) раскроем в формуле (34) выражения, характеризующие процедуры вейвлет-преобразования, учитывая, что переменные частоты u функций \hat{g}_t и $\bar{\mu}_k$ различны с $\bar{\lambda}_k$:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_z^{(k)}(f, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \hat{g}_t(u) \bar{\mu}_k(u) \times \\ &\times \frac{v\bar{\lambda}_k(\vartheta)\bar{\lambda}_k(-\vartheta)}{\bar{\lambda}_k(\vartheta)\bar{\lambda}_k(-\vartheta)f} \hat{z}(\bar{\lambda}_k(\vartheta)v) \hat{z}^*(\bar{\lambda}_k(\vartheta)v) \times \\ &\times \hat{\Psi}^*\left(\frac{\bar{\lambda}_k(\vartheta)v}{\bar{\lambda}_k(\vartheta)f}\right) \hat{\Psi}\left(\frac{\bar{\lambda}_k(-\vartheta)v}{\bar{\lambda}_k(-\vartheta)f}\right) \times \\ &\times \exp(-j2\pi vt\bar{\chi}_k(\vartheta)) dv d\vartheta du. \end{aligned} \quad (40)$$

Так как:

$$\begin{aligned} & \hat{z}(\bar{\lambda}_k(\vartheta)v) \hat{z}^*(\bar{\lambda}_k(-\vartheta)v) = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \varpi_z^{(k)}(v, \tau) \exp(j2\pi v \tau \bar{\chi}_k(\vartheta)) d\tau, \end{aligned} \quad (41)$$

то, подставив (41) в (40), получим [18]:

$$\begin{aligned} \tilde{\varpi}_z^{(k)}(f, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \varpi_z^{(k)}(v, \tau) \left[\frac{v}{f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_t(u) \bar{\mu}_k(u) \times \right. \\ & \times \frac{\bar{\lambda}_k(\vartheta) \bar{\lambda}_k(-\vartheta)}{\bar{\lambda}_k(u) \bar{\lambda}_k(-u)} \hat{\Psi}^* \left(\frac{\bar{\lambda}_k(-\vartheta)v}{\bar{\lambda}_k(-u)f} \right) \hat{\Psi} \left(\frac{\bar{\lambda}_k(\vartheta)v}{\bar{\lambda}_k(u)f} \right) \times \\ & \left. \times \exp \left(j2\pi \frac{v}{f} (\tau - t) \bar{\chi}_k(\vartheta) \right) d\vartheta du \right] dv d\tau. \end{aligned} \quad (42)$$

Если представить выражение, заключенное в квадратные скобки, как генерирующее ядро в формуле (42), то можно предположить, что для формирования сглаженного псевдораспределения аффинного типа необходимо в качестве порождающей функции взять ЧВР Вигнера следующего вида:

$$\begin{aligned} \varpi_z^{(k)}(f, t) = & f \int_{-\infty}^{\infty} \hat{z}(\bar{\lambda}_k(u)f) \hat{z}^*(\bar{\lambda}_k(-u)f) \times \\ & \times \exp \left(j2\pi t f \bar{\chi}_k(u) \frac{d\bar{\chi}_k(u)}{du} \right) du. \end{aligned} \quad (43)$$

В этом случае ядро преобразования будет иметь следующую форму:

$$\begin{aligned} \Pi^{(k)}(f, t) = & f \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_t(u) \bar{\mu}_k(u) \frac{\bar{\lambda}_k(\vartheta) \bar{\lambda}_k(-\vartheta)}{\bar{\lambda}_k(u) \bar{\lambda}_k(-u)} \times \\ & \times \hat{\Psi}^* \left(\frac{\bar{\lambda}_k(-\vartheta)f}{\bar{\lambda}_k(-u)} \right) \hat{\Psi} \left(\frac{\bar{\lambda}_k(\vartheta)f}{\bar{\lambda}_k(u)} \right) e^{j2\pi f t \bar{\chi}_k(\vartheta)} d\vartheta du. \end{aligned} \quad (44)$$

Отметим, что выбор коэффициента масштаба влияет не только на геометрические характеристики аффинного сдвига, но и на вид порождающей функции. Однако только функция Вигнера вида $\varpi_z^{(2)}$ может выступать в роли унитарного распределения, в котором функция $\bar{\mu}_k$ определяет специфичность формы. Воспользуемся свойством (25) и представим $\bar{\mu}_k$, характеризующую распределение Вигнера аффинного типа, в виде:

$$\bar{\mu}_k^U(u) = \left(\bar{\lambda}_k(u) \bar{\lambda}_k(-u) \frac{d}{du} [\bar{\lambda}_k(u) - \bar{\lambda}_k(-u)] \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (45)$$

тогда для порождающей функции (43) получим:

$$\bar{\mu}_k^V(u) = \frac{d}{du} \bar{\chi}_k(u) = \frac{d}{du} [\bar{\lambda}_k(u) - \bar{\lambda}_k(-u)]. \quad (46)$$

Отметим, что в (45) и (46) она должна удовлетворять свойству симметрии (24). Решение дифференциального уравнения $\bar{\mu}_k^{-U} = \bar{\mu}_k^{-V}$ [7, 36], после проведенных упрощений, может быть записано в виде:

$$\bar{\lambda}_k(u) \bar{\lambda}_k(-u) = \frac{d}{du} [\bar{\lambda}_k(u) - \bar{\lambda}_k(-u)]. \quad (47)$$

Представим $\bar{\lambda}_k(u)$ суммой четной и нечетной частей $\bar{\lambda}_k(u) = l(u) + h(u)$, и в конечном итоге запишем в виде:

$$l(u) - h(u) = e^{-u} [l(u) + h(u)] \quad (48)$$

или, что эквивалентно:

$$h(u) = l(u) \tanh \frac{u}{2}. \quad (49)$$

Теперь представим (47) с учетом разложения $\bar{\lambda}_k(u) = l(u) + h(u)$:

$$l^2(u) = h^2(u) + 2 \frac{d}{du} h(u). \quad (50)$$

Выразим значение $l(u)$ из формулы (49) и подставим его в (50):

$$h^2(u) = \tanh^2 \left(\frac{u}{2} \right) \left[h^2(u) + 2 \frac{d}{du} h(u) \right]. \quad (51)$$

Формулу (51) можно представить в виде:

$$\frac{d}{du} \left(\frac{1}{h(u)} \right) = \frac{\tanh^2[u/2] - 1}{2 \tanh^2[u/2]}. \quad (52)$$

Решением уравнения (52), при замене переменной $x = \tanh(u/2)$, будет:

$$h(u) = \tanh \left(\frac{u}{2} \right). \quad (53)$$

Следовательно, равенство (49) справедливо только при условии, что $l(u) = 1$. Поэтому, для уравнения (33) только порождающая функция вида $\varpi_z^{(2)}$ будет унитарной [18]. На основании доказанного условия можно заключить, что обобщенное выражение (33) является унитарным как для масштабнo-временных представлений в аффинном классе, так и для частотно-временных представлений в классе Коэна.

Заметим, что выражения для аффинного распределения Вигнера и распределения Вигнера класса Коэна имеют одинаковую порождающую функцию, т.е. фактически, выбирая соответствующее ядро преобразования, можно получить распределение как в классе Коэна, так и в аффинном классе, в зависимости от требований решаемых задач. Причем в обоих случаях в качестве порождающей функции будет выступать функция Вигнера, представляющая спектр от свертки сигнала со своим зеркальным отображением (мгновенной корреляции), или с позиций фильтрации – свертку сигнала с согласованным фильтром [21].

Применение разработанного аналитического аппарата позволяет наделять синтезируемое распределение свойством инвариантности к частотно-временным сдвигам. При этом использование уравнения (33) предусматривает проведение тех же

процедур обработки в кратномасштабном базисе, что придает искомому распределению свойство инвариантности к масштабно-временным сдвигам.

Предложенный метод синтеза позволяет определить следующий подход к формированию псевдораспределений Вигнера аффинного типа. Если в формулах для псевдораспределений функцию-окно $h(\tau)$ изменить в соответствии с теоремой 3 как частотно-зависимую, то тем самым переопределим базис декомпозиции. Тогда по аналогии с выражением для псевдораспределения Вигнера класса Коэна:

$$\tilde{p}_W(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_z^*\left(f - \frac{v}{2}, t\right) S_z\left(f + \frac{v}{2}, t\right) e^{j2\pi tv} dv \quad (54)$$

псевдораспределение Вигнера аффинного типа можно представить следующим образом [25]:

$$\tilde{\omega}_z^{(2)}(f, t) = \int D_z^*\left(-\frac{v}{f}, t\right) D_z\left(\frac{v}{f}, t\right) e^{j2\pi tv} dv, \quad (55)$$

где D_z^* – масштабодиаграмма (аналог спектрограммы, но в аффинном классе).

Фактически, выражение (55) получается формальной заменой в выражении для псевдораспределения Вигнера мгновенной корреляции результата оконного преобразования Фурье сигнала на мгновенную корреляцию его вейвлет-преобразования.

Список используемых источников

1. Дворников С.В. Теоретические основы синтеза билинейных распределений энергии нестационарных процессов в частотно-временном пространстве: обзор // Труды учебных заведений связи. 2018. Т. 4. № 1. С. 47–60. DOI:10.31854/1813-324X-2018-1-47-60
2. Дворников С.В. Билинейные распределения с пониженным уровнем интерференционного фона в частотно-временном пространстве: продолжение обзора // Труды учебных заведений связи. 2018. Т. 4. № 2. С. 69–81. DOI:10.31854/1813-324X-2018-2-69-81
3. Дворников С.В. Билинейные масштабно-временные распределения энергии аффинного класса в частотно-временном пространстве: продолжение обзора // Труды учебных заведений связи. 2018. Т. 4. № 3. С. 26–44. DOI:10.31854/1813-324X-2018-4-3-26-44
4. Cohen L. Time-Frequency Distribution – a Review // Proceedings of the IEEE. 1989. Vol. 77. Iss. 7. PP. 941–981. DOI:10.1109/5.30749
5. Claasen T.A.C.M., Meulenbrauker W.F.G. The Wigner Distribution – a Tool for Time-Frequency Signal Analysis. Part 1, 2, 3 // Philips Journal of Research. 1980. Vol. 35. PP. 217–250, 276–300, 372–389.
6. Bertrand J., Bertrand P. A class of affine Wigner functions with extended covariance properties // Journal of Mathematical Physics. 1992. Vol. 33. Iss. 7. DOI:10.1063/1.529570
7. Flandrin P. Time-Frequency / Time-Scale Analysis. San Diego: Academic Press, 1999 (translated by Stöckler from the French editions, Temps-frequency. Paris: Hermes, 1993).
8. Mallat S.G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1989. Vol. 11. Iss. 7. PP. 674–693. DOI:10.1109/34.192463
9. Grossmann A., Morlet J. Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2006. Vol. 15. Iss. 4. DOI:10.1137/0515056
10. Baraniuk R.G. Covariant Time-Frequency Representations through Unitary Equivalence // IEEE Signal Processing Letters. 1996. Vol. 3. Iss. 3. PP. 79–81. DOI:10.1109/97.481161
11. Flandrin P., Gonsalves P. Geometry of affine distributions // Proceedings of IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis, 25–28 October 1994, Philadelphia, PA, USA. 1994. PP. 80–83. DOI:10.1109/TFSA.1994.467359
12. Auger F., Flandrin P. Improving the readability of time-frequency and time-scale representation by the reassignment method // IEEE Transactions on Signal Processing. 1995. Vol. 43. Iss. 5. PP. 1068–1089. DOI:10.1109/78.382394
13. Coifman R., Meyer Y., Wickerhauser V. Wavelet Analysis and Signal Processing // In Wavelets and their Applications. Boston: Jones and Bartlett. 1992. PP. 153–178.
14. Auger F., Flandrin P., Gonçalves P., Lemoine O. Time-Frequency Toolbox – For using with MATLAB. Reference Guide. 2005. 179 p.

Заключение

Представленный аналитический аппарат синтеза гибридных форм билинейных распределений можно рассматривать как инструмент анализа тонкой структуры сигналов с высокой нестационарностью поведения их параметров на интервале наблюдения.

При этом результирующие билинейные распределения, получаемые на основе выражений (33, 35, 36, 54), удобны с точки зрения не только их формирования, но и синтеза на их базе продуктивных быстродействующих алгоритмов.

Рассмотренная методология существенно расширяет известные границы частотно-временного анализа, который в настоящем контексте можно интерпретировать как частный случай более общего масштабно-временного анализа.

Таким образом, можно заключить, что теория билинейных распределений, заложенная Коэном еще в середине прошлого века, продолжает свое развитие, открывая все новые грани эффективных процедур обработки сигналов в приложении к практическим задачам всех видов связи и телекоммуникаций [23–29, 31, 34, 40].

Другим направлением видится синтез помехоустойчивых сигналов [41–45], но на основе различных форм совместных распределений их энергии.

15. Ovarlez J.-P. La transformation de Mellin et l'analyse des signaux large bande // Coll. Temps-Fréquence, Ondelettes et Multirésolution: Théorie, Modèles et Applications, INSA-Lyon. 1994.
16. Jones D.L., Baraniuk R.G. A simple scheme for adapting time-frequency representations // IEEE Transactions on Signal Processing. 1994. Vol. 42. Iss. 12. PP. 3530–3535. DOI:10.1109/78.340790
17. Дворников С.В. Теоретические основы синтеза частотно-временных представлений класса Коэна // Информациa и космос. 2008. № 3. С. 16–24.
18. Дворников С.В., Кудрявцев А.М. Теоретические основы частотно-временного анализа кратковременных сигналов: монография. СПб.: ВАС, 2010. 240 с.
19. Дворников С.В., Алексеева Т.Е. Распределение Алексеева и его применение в задачах частотно-временной обработки сигналов // Информациa и космос. 2006. № 3. С. 9–20.
20. Алексеев А.А., Железняк В.К., Комарович В.Ф., Дворников С.В. Автоматизированная система контроля интенсивности физических полей рассеивания сигналов // Научное приборостроение. 2000. Т. 10. № 3. С. 77–87.
21. Дворников С.В. Теоретические основы синтеза билинейных распределений. СПб.: Издательство Политехнического университета, 2007. 268 с.
22. Дворников С.В., Бородин Е.Ю., Маджар Х., Махлуф Ю.Х. Частотно-временное оценивание параметров сигналов на основе функций огибающих плотности распределения их энергии // Информациa и космос. 2007. № 4. С. 41–45.
23. Дворников С.В., Яхеев А.Ф. Метод измерения параметров кратковременных сигналов на основе распределения Алексеева // Информациa и космос. 2011. № 1. С. 66–74.
24. Алексеев А.А., Аладинский В.А., Железняк В.К., Комарович В.Ф., Дворников С.В. Применение методов частотно-временной обработки акустических сигналов для анализа параметров реверберации // Научное приборостроение. 2001. Т. 11. № 1. С. 65–76.
25. Дворников С.В., Железняк В.К., Храмов Р.Н., Желнин С.Р., Медведев М.В., Симонов А.Н., Сауков А.М. Метод обнаружения радиоизлучений на основе частотно-временного распределения Алексеева // Научное приборостроение. 2006. Т. 16. № 1. С. 107–115.
26. Яхеев А.Ф., Дворников С.В. Измерение параметров сигналов на основе оптимизации формы распределения Алексеева // Научное приборостроение. 2009. Т. 10. № 1. С. 25–28.
27. Дворников С.В., Осадчий А.И., Дворников С.С., Родин Д.В. Демодуляция сигналов на основе обработки их модифицированных распределений // Контроль. Диагностика. 2010. № 10. С. 46–54.
28. Дворников С.В. Демодуляция сигналов на основе обработки их модифицированных частотно-временных распределений // Цифровая обработка сигналов. 2009. № 2. С. 7–11.
29. Дворников С.В., Сауков А.М. Модификация частотно-временных описаний нестационарных процессов на основе показательных и степенных функций // Научное приборостроение. 2004. Т. 14. № 3. С. 76–85.
30. Дворников С.В. Теоретические основы представления сигнала в аналитическом виде функциями его огибающей и полной фазы // Научное приборостроение. 2006. Т. 16. № 4. С. 106–111.
31. Дворников С.В., Супян А.Ю., Жечев А.Г. Демодуляция сигналов методом обработки их модифицированных распределений // Информациa и космос. 2009. № 1. С. 58–65.
32. Дворников С.В. Проблема поиска сигналов источников информации при радиомониторинге // Мобильные системы. 2007. № 4. С. 33–35.
33. Дворников С.В., Желнин С.Р., Медведев М.В. Метод формирования признаков распознавания сигналов диапазона декаметровых волн по их вейвлет-коэффициентам, рассчитанным на основе лифтинговой схемы // Информациa и космос. 2006. № 2. С. 68–73.
34. Дворников С.В., Дворников А.С., Желнин С.Р., Оков И.Н., Сауков А.М., Симонов А.Н., Яхеев А.Ф. Способ распознавания радиосигналов. Патент на изобретение RUS 2356064 от 24.04.2007.
35. Алексеев А.А., Кириллов А.Б. Технический анализ сигналов и распознавание радиоизлучений. СПб.: ВАС, 1998. 368 с.
36. Gonsalves P., Baraniuk R.G. A Pseudo-Bertrand Distribution for Time-Scale Analysis // IEEE Signal Processing Letters. 1996. Vol. 3. Iss. 3. PP. 82–84. DOI:10.1109/97.481162
37. Cohen L. Time-Frequency Analysis. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995. 299 p.
38. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1974. 832 с.
39. Flandrin P., Rioul O. Affine smoothing of the Wigner-Ville distribution // IEEE Processing International Conference on Acoustics, Speech, and Signal, Albuquerque, 3–6 April 1990, NM, USA. 1990. Vol. 5. PP. 2456–2458. DOI:10.1109/ICASSP.1990.116088
40. Аладинский В.А., Дворников С.В., Сауков А.М., Симонов А.Н. Способ распознавания радиосигналов. Патент на изобретение RUS 2261476 от 26.01.2004.
41. Дворников С.В., Дворников С.С., Спирин А.М. Синтез манипулированных сигналов на основе вейвлет-функций // Информационные технологии. 2013. № 12. С. 52–55.
42. Дворников С.В. Цифровой синтез спектрально-эффективных сигналов телевидения // Вопросы радиоэлектроники. Серия: Техника телевидения. 2015. № 6. С. 168–173.
43. Дворников С.В., Пшеничников А.В., Манаенко С.С. Помехоустойчивая модель сигнала КАМ-16 с трансформированным созвездием // Информационные технологии. 2015. Т. 21. № 9. С. 685–689.
44. Дворников С.В., Пшеничников А.В., Бурыкин Д.А. Структурно-функциональная модель сигнального созвездия с повышенной помехоустойчивостью // Информациa и космос. 2015. № 2. С. 4–7.
45. Дворников С.В., Пшеничников А.В., Манаенко С.С., Бурыкин Д.А., Кузнецов Д.А. Теоретические положения повышения помехоустойчивости сигнально-кодовых конструкций квадратурных сигналов // Информациa и космос. 2015. № 3. С. 13–16.

* * *

GENERALIZED HYBRID SCALE-FREQUENCY-TIME DISTRIBUTIONS IN TIME-FREQUENCY SPACE (CONTINUED REVIEW)

S. Dvornikov¹

¹Telecommunications Military Academy,
St. Petersburg, 194064, Russian Federation

Article info

Article in Russian

For citation: Dvornikov S. Generalized Hybrid Scale-Frequency-Time Distributions in Time-Frequency Space: Continued Review. *Proceedings of Telecommunication Universities*. 2018;4(4):20–35. (in Russ.) Available from: <https://doi.org/10.31854/1813-324X-2018-4-4-20-35>

Abstract: A review of the theoretical foundations of the synthesis of hybrid distributions, which are generalized representations with respect to frequency-time distributions of the Cohen class and scale-time distributions of the affine class, is presented. The methodology of synthesis and display of their generality with respect to known forms of joint descriptions of the energy distribution density in frequency-time space is analyzed. The theoretical validity of hybrid forms, called the scale-frequency-time distributions, is proved. Analytic approaches to their synthesis are generalized and high-performance analytical algorithms adapted to the methodology of digital signal processing are presented. Analytical expressions and results of experiments on signal processing with high nonstationarity of the behavior of their parameters on the observation interval are presented.

Keywords: scale-time distributions, signal processing methods with high parameter non-stationarity, affine and Cohen class distributions, hybrid distributions.

References

1. Dvornikov S. Theoretical Foundations of the Synthesis of Bilinear Energy Distributions of Non-Stationary Processes in the Frequency-Temporary Space: Review. *Proceedings of Telecommunication Universities*. 2018;4(1):47–60. (in Russ.) Available from: <https://doi.org/10.31854/1813-324X-2018-1-47-60>
2. Dvornikov S. Bilinear Time-Frequency Distributions with a Lowered Level of the Interference Background in the Frequency-Temporary Space: Continued Review. *Proceedings of Telecommunication Universities*. 2018;4(2):69–81. (in Russ.) Available from: <https://doi.org/10.31854/1813-324X-2018-2-69-81>
3. Dvornikov S. Bilinear Scale-Temporary Distributions of Energy of the Affine Class in the Frequency-Temporary Space: Continued Review. *Proceedings of Telecommunication Universities*. 2018;4(3):26–44. (in Russ.) Available from: <https://doi.org/10.31854/1813-324X-2018-4-3-26-44>
4. Cohen L. Time-Frequency Distribution – a Review. *Proceedings of the IEEE*. 1989;77(7):941–981. (in Russ.) Available from: <https://doi.org/10.1109/5.30749>
5. Claasen T.A.C.M., Meulenbrauker W.F.G. The Wigner Distribution – a Tool for Time-Frequency Signal Analysis. Part 1, 2, 3. *Philips Journal of Research*. 1980;35:217–250,276–300,372–389.
6. Bertrand J., Bertrand P. A class of affine Wigner functions with extended covariance properties. *Journal of Mathematical Physics*. 1992;33(7). (in Russ.) Available from: <https://doi.org/10.1063/1.529570>
7. Flandrin P. *Time-Frequency / Time-Scale Analysis*. San Diego: Academic Press; 1999. 386 p. (Translated by Stöckler from the French ed.: *Temps-frequency*. Paris: Hermes; 1993).
8. Mallat S.G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 1989;11(7):674–693. Available from: <https://doi.org/10.1109/34.192463>
9. Grossmann A., Morlet J. Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 2006;15(4). Available from: <https://doi.org/10.1137/0515056>
10. Baraniuk R.G. Covariant Time-Frequency Representations through Unitary Equivalence. *IEEE Signal Processing Letters*. 1996;3(3):79–81. Available from: <https://doi.org/10.1109/97.481161>
11. Flandrin P., Gonsalves P. Geometry of affine distributions. *Proceedings of IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis, 25–28 October 1994, Philadelphia, PA, USA*. 1994. p.80–83. Available from: <https://doi.org/10.1109/TFSA.1994.467359>
12. Auger F., Flandrin P. Improving the readability of time-frequency and time-scale representation by the reassignment method. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1995;43(5):1068–1089. Available from: <https://doi.org/10.1109/78.382394>
13. Coifman R., Meyer Y., Wickerhauser V. Wavelet Analysis and Signal Processing. In: Ruskai M.B. et al. (eds.) *Wavelets and their Applications*. Boston, USA: Jones and Bartlett; 1992. p.153–178.
14. Auger F., Flandrin P., Gonçalves P., Lemoine O. *Time-Frequency Toolbox – For using with MATLAB. Reference Guide*; 2005. 179 p.
15. Ovarlez J.-P. La transformation de Mellin et l'analyse des signaux large bande. *Coll. Temps-Fréquence, Ondelettes et Multirésolution: Théorie, Modèles et Applications, INSA-Lyon*. 1994.

16. Jones D.L., Baraniuk R.G. A simple scheme for adapting time-frequency representations. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1994;42(12):3530–3535. Available from: <https://doi.org/10.1109/TFSA.1994.46735910.1109/78.340790>
17. Dvornikov S.V. *Teoreticheskie osnovy sinteza chastotno-vremennykh predstavlenii klassa Koena* [Theoretical Foundations of the Synthesis of Time-Frequency Representations of the Cohen Class]. *Information and Space*. 2008;3:16–24. (in Russ.)
18. Dvornikov S.V., Kudryavtsev A.M. *Teoreticheskie osnovy chastotno-vremennogo analiza kratkovremennykh signalov: monografiia* [Theoretical Foundations of Time-Frequency Analysis of Short-Term Signals. Monograph]. St. Petersburg: Telecommunications Military Academy Publ.; 2010. 240 p. (in Russ.)
19. Dvornikov S.V., Alekseeva T.E. Raspredelenie Alekseeva i ego primeneniie v zadachakh chastotno-vremennoi obrabotki signalov [Alekseev Distribution and Its Application in Frequency-Time Signal Processing Tasks]. *Information and Space*. 2006;3:9–20. (in Russ.)
20. Alekseev A.A., Zhelezniak V.K., Komarov V.F., Dvornikov S.V. Automated intensity control system of signal scattering physical fields. *Nauchnoe Priborostroenie (Scientific Instrumentation)*. 2000;10(3):77–87. (in Russ.)
21. Dvornikov S.V. *Teoreticheskie osnovy sinteza bilineinykh raspredelenii* [Theoretical Basis for the Synthesis of Bilinear Distributions]. St. Petersburg: Izdatelstvo Politehnicheskogo universiteta Publ.; 2007. 268 p. (in Russ.)
22. Dvornikov S.V., Borodin E.I., Madzhar K., Makhluif I.K. Chastotno-vremennoe otsenivanie parametrov signalov na osnove funktsii ogibaiushchikh plotnosti raspredeleniia ikh energii [Frequency-Time Estimation of Signal Parameters Based on Envelope Functions of Their Energy Distribution Density]. *Information and Space*. 2007;4:41–45. (in Russ.)
23. Dvornikov S.V., Jakheev A.F. Metod izmereniia parametrov kratkovremennykh signalov na osnove raspredeleniia Alekseeva [Method for Measuring Short-Term Signal Parameters Based on Alekseev Distribution]. *Information and Space*. 2011;1:66–74. (in Russ.)
24. Alekseev A.A., Aladinskiy V.A., Zheleznyak V.K., Komarov V.F., Dvornikov S.V. Time-frequency processing of acoustic signals applied to reverberation parameters measurement. *Nauchnoe Priborostroenie (Scientific Instrumentation)*. 2001;11(1):65–76. (in Russ.)
25. Dvornikov S.V., Zheleznyak V.K., Khramov R.N., Zhelmin S.R., Medvedev M.V., Simonov A.N., et al. Method of radio signal detection based on alexeev's time-frequency distribution [Method of Detection of Radio Emissions Based on the Time-Frequency Distribution of Alekseev]. *Nauchnoe Priborostroenie (Scientific Instrumentation)*. 2006;16(1):107–115. (in Russ.)
26. Jakheev A.F., Dvornikov S.V. Measurement of Signals' Parameters on the Basis of Advanced Alekseev's Distribution Form. *Science Intensive Technologies*. 2009;10(1):25–28. (in Russ.)
27. Dvornikov S.V., Osadchy A.I., Dvornikov S.S., Rodin D.V. Demodulation Based on Processing the Modified Distributions. *Testing. Diagnostics*. 2010;10:46–54. (in Russ.)
28. Dvornikov S.V. Demoduliatitsiia signalov na osnove obrabotki ikh modifitsirovannykh chastotno-vremennykh raspredelenii [Demodulation of Signals Based on the Processing of Their Modified Time-Frequency Distributions]. *Digital Signal Processing*. 2009;2:7–11. (in Russ.)
29. Dvornikov S.V., Saukov A.M. Modification of time-frequency descriptions of non-stationary processes Based on Exponential and Power functions. *Nauchnoe Priborostroenie (Scientific Instrumentation)*. 2004;14(3):76–85. (in Russ.)
30. Dvornikov S.V. Theory of analytic signal presentation by functions of signal envelope and total phase. *Nauchnoe Priborostroenie (Scientific Instrumentation)*. 2006;16(4):106–111. (in Russ.)
31. Dvornikov S.V., Supian A.I., Zhechev A.G. Demoduliatitsiia signalov metodom obrabotki ikh modifitsirovannykh raspredelenii [Demodulation of signals by processing their modified distributions]. *Information and Space*. 2009;1:58–65. (in Russ.)
32. Dvornikov S.V. Searching of information sources in radio-monitoring. *Mobilnye sistemy*. 2007;4:33–35. (in Russ.)
33. Dvornikov S.V., Zhelmin S.R., Medvedev M.V. Metod formirovaniia priznakov raspoznavaniia signalov diapazona dekametrovykh voln po ikh veivlet-koeffitsientam rasschitannym na osnove liftingovoi skhemy [The method of Forming Signs of Recognition of Signals in the Range of Decameter Waves by Their Wavelet Coefficients, Calculated on the Basis of a Lifting Scheme]. *Information and Space*. 2006;2:68–73. (in Russ.)
34. Dvornikov S.V., Dvornikov A.S., Zhelmin S.R., Okov I.N., Saukov A.M., Simonov A.N., et al. *Sposob raspoznavaniia radiosignalov*. [Method of Recognition of Radio Signals]. Patent RF, no. 2356064, 24.04.2007.
35. Alekseev A.A., Kirillov A.B. *Tekhnicheskii analiz signalov i raspoznavanie radioizlucheniia* [Technical Analysis of Signals and Recognition of Radio Emission]. St. Petersburg: Telecommunications Military Academy Publ.; 1998. 368 p. (in Russ.)
36. Gonsalves P., Baraniuk R.G. A pseudo-Bertrand distribution for time-scale analysis. *IEEE Signal Processing Letters*. 1996;3(3):82–84. Available from: <https://doi.org/10.1109/97.481162>
37. Cohen L. *Time-Frequency Analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall; 1995. 299 p.
38. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers]. Moscow: Nauka Publ.; 1974. 832 p. (in Russ.)
39. Flandrin P., Rioul O. Affine smoothing of the Wigner-Ville distribution. *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Albuquerque, 3–6 April 1990, NM, USA*. 1990;5:2456–2458. Available from: <https://doi.org/10.1109/ICASSP.1990.116088>
40. Aladinskiy V.A., Dvornikov S.V., Saukov A.M., Simonov A.N. *Sposob raspoznavaniia radiosignalov* [Method of Recognition of Radio Signals]. Patent RF, no. 2261476, 26.01.2004.
41. Dvornikov S.V., Dvornikov S.S., Spirin A.M. Syntheses of Manipulated Signals on the Base of Wavelet-Functions. *Information Technology*. 2013;12:52–55. (in Russ.)
42. Dvornikov S.V. Digital synthesis of spectral-effective television signals. *Voprosy radioelektroniki. Seriya: Tekhnika teledeniia*. 2015;6:168–173. (in Russ.)
43. Dvornikov S.V., Pshenichnicov A.V., Manaenko S.S. Increased Noise Immunity Signal 16-QAM Constellation with Transformed. *Information Technology*. 2015;21(9):685–689. (in Russ.)
44. Dvornikov S.V., Pshenichnicov A.V., Burikin D.A. Strukturno-funksionalnaia model signalnogo sovezdii s povyshennoi pomekhoustoichivostiu [Structural and Functional Model of the Signal Constellation with high Noise Immunity]. *Information and Space*. 2015;2:4–7. (in Russ.)
45. Dvornikov S.V., Pshenichnicov A.V., Manaenko S.S., Burikin D.A., Kuznetsov D.A. Teoreticheskie polozeniia povysheniia pomekhoustoichivosti signalno-kodovykh konstruksii kvadraturnykh signalov [Theoretical Provisions for Improving the Noise Immunity of Signal-Code Designs of Quadrature Signals]. *Information and Space*. 2015;3:13–16. (in Russ.)