

БИЛИНЕЙНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ПОНИЖЕННЫМ УРОВНЕМ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОГО ФОНА В ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ (продолжение обзора)

С.В. Дворников^{1*}

¹Военная академия связи имени Маршала Советского Союза С.М. Буденного, Санкт-Петербург, 194064, Российская Федерация

*Адрес для переписки: practicdsv@yandex.ru

Информация о статье

УДК 621.391

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Дворников С.В. Билинейные распределения с пониженным уровнем интерференционного фона в частотно-временном пространстве: продолжение обзора // Труды учебных заведений связи. 2018. Т. 4. № 2. С. 69-81.

Аннотация: Представлен обзор теоретических основ синтеза различных видов псевдораспределений класса Вигнера. Проанализированы возможности известных подходов по снижению негативных последствий обработки многокомпонентных сигналов на основе билинейных распределений. Представлены аналитические выражения для частотно-временных распределений, обладающих низким уровнем интерференционного фона. Обоснованы причины применения сглаживающих оконных функций в частотном и временном пространствах. Приведены аналитические выражения и результаты экспериментов наиболее известных форм билинейных распределений с пониженным уровнем интерференционного фона.

Ключевые слова: частотно-временные псевдораспределения, методы борьбы с интерференционным фоном, обработка многокомпонентных сигналов, распределения класса Козна.

Введение

В предыдущей статье [1], посвященной теоретическим основам представления нестационарных процессов на основе их совместных частотно-временных распределений (ЧВР) энергии, были подробно рассмотрены причины, побудившие к применению методов частотно-временного анализа. Показана определяющая роль и место функции Вигнера, как базового ЧВР в классе распределений Козна. Приведены аналитические выражения и результаты экспериментов, характеризующие особенности обработки нестационарных сигналов на основе наиболее известных ЧВР класса Козна. Вместе с тем показаны основные ограничения частотно-временного анализа, обусловленные наличием так называемого интерференционного фона, возникающим при обработке, в общем случае, многокомпонентных сигналов, что ограничивает практическое применение канонических форм распределений класса Козна.

В связи с этим, в настоящей статье представлены ключевые моменты, связанные с дальнейшим генезисом методов теории билинейных распределений, направленных на снижение негативных послед-

ствий, вызванных интерференционным фоном. Основу данному направлению положили работы таких выдающихся ученых как Claasen Т.А.С.М., Meclenbrauker W.F.G, Choi H., Williams W. [2, 3].

Проблемы обработки многокомпонентных сигналов

В общем случае многокомпонентные сигналы можно представить в следующем виде [4, 5]:

$$y(t) = \sum_{i=0}^n z_i(t), \quad (1)$$

где $z_i(t)$ – i -ая компонента каждого из колебаний, составляющих многокомпонентный (совокупность однокомпонентных сигналов); n – общее количество обрабатываемых компонент.

С учетом указанных обстоятельств многокомпонентный сигнал можно представить, как формулу:

$$z_i(t) = A_i(t) \cos \theta_i(t), \quad (2)$$

где $A_i(t)$, $\theta_i(t)$ – гладкие функции, соответственно, амплитуды и полной фазы i -ой компоненты.

Многокомпонентная ситуация, как правило, возникает и в условиях сложной сигнально помеховой обстановки. В этом случае, ввиду ограниченности частотного диапазона устройств обработки, входной поток будет представлять суммарный процесс случайных мешающих воздействий и преднамеренных помех в совокупности с полезным сигналом конечной длительности [6, 7].

Применение ЧВР Вигнера при обработке многокомпонентных сигналов приводит к появлению на частотно-временной плоскости наряду с отдельными компонентами так называемых интерференционных всплесков, представляющих результат взаимодействия энергетических составляющих входного процесса, расположенных на различных частотах временного интервала [8].

В своей совокупности интерференционные компоненты представляют паразитный помеховый фон. Данное утверждение основывается на свойствах функции Вигнера [9].

Пусть обрабатывается входной поток, состоящий из двух независимых сигналов $z(t)$ и $g(t)$. Тогда распределение Вигнера будет иметь вид [10]:

$$\rho_{z+g}(f, t) = \rho_z(f, t) + \rho_g(f, t) + 2\text{Re}[\rho_{z,g}(f, t)], \quad (3)$$

где

$$\rho_{z,g}(f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} z_a^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) g_a \left(t + \frac{\tau}{2} \right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau -$$

взаимное ЧВР Вигнера двух сигналов.

Анализ выражения (3) показывает, что результирующая частотно-временная матрица помимо компонентов, соответствующих сигналам $z(t)$ и $g(t)$, содержит компоненты, представляющие результат их взаимодействия $\rho_{z,g}(f, t)$, которые и являются паразитным интерференционным фоном.

В подтверждение теоретическим выкладкам на рисунке 1 представлен фрагмент распределения Вигнера смеси двух независимых сигналов линейной частотной модуляции (ЛЧМ):

$$y(t) = \cos \left(2\pi f_1 t + \frac{\alpha_1 t^2}{2} \right) + \cos \left(2\pi f_2 t + \frac{\alpha_2 t^2}{2} \right). \quad (4)$$

На частотно-временной плоскости распределения, помимо суммы двух сигналов, отчетливо просматриваются паразитные компоненты взаимодействия $z(t)$ и $g(t)$. Очевидно, что интерференционный фон значительно усложняет проведение последующего анализа полученного ЧВР. И если при использовании тестовых сигналов интерференционный фон еще как-то можно учесть за счет априорных данных о структуре сигнала и локализации его компонент на частотно-временной плоскости, то при работе с радиоизлучениями, параметры ко-

торых неизвестны, указанная проблема фактически не разрешима.

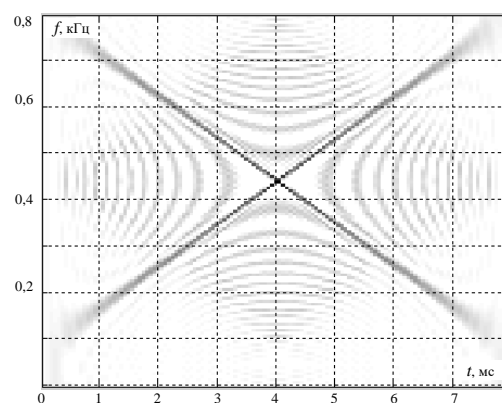


Рис. 1. Фрагмент распределения Вигнера тестового двухкомпонентного ЛЧМ-сигнала

Поскольку на практике в полосе полезного сигнала помимо шума могут присутствовать излучения и других радиоэлектронных средств, включая и помехи как преднамеренного характера, так и возникающие в результате многолучевого распространения радиоволн, то в такой ситуации интерференционный фон полностью учесть практически невозможно. Следовательно, невозможно и однозначно выделить полезный сигнал.

Применение функций в виде ядер преобразований для подавления интерференционных компонент

В настоящее время разработаны различные подходы к решению указанной проблемы, среди которых наиболее конструктивным видится использование ядра преобразования «экспоненциального» вида [3]:

$$\Phi(\tau, \xi) = e^{-(2\pi\xi\tau)^2/\sigma}, \quad \sigma > 0. \quad (5)$$

Действительно, для многокомпонентного сигнала (1) с учетом (3) получим распределение следующего вида:

$$\rho(f, t) = \sum_{i=1}^N \rho_{z_i z_i}(f, t) + \sum_{n \neq m} \rho_{z_n z_m}(f, t). \quad (6)$$

В (6) значение $\rho_{z_n z_m}(f, t)$ определяется в соответствии с теоремой Мойалла [11]:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} z_a^*(t) g_a(t) dt \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_z(f, t) \cdot \rho_g^*(f, t) df dt. \quad (7)$$

С математической точки зрения первый член равенства (6) соответствует автокорреляции от функции неопределенности (ФН). А второй член представляет собой взаимную ФН от N однокомпонентных сигналов, составляющих многокомпонентный сигнал.

С учетом указанных обстоятельств представим формулу (7) в следующем виде:

$$\chi(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^N \chi_{z_i, z_i}(\xi, \tau) + \sum_{n \neq m} \chi_{z_n, z_m}(\xi, \tau). \quad (8)$$

В соответствии с определением в [12], одна из форм ФН имеет вид:

$$\chi_{z_n, z_m}(\xi, \tau) = \Phi(\xi, \tau) \times \int_{-\infty}^{\infty} z_{a_n}(\mu + \frac{\tau}{2}) z_{a_m}^*(\mu - \frac{\tau}{2}) e^{j2\pi f \tau} d\mu. \quad (9)$$

Анализ выражений (8) и (9) позволяет определить сущность механизма подавления интерференционного фона, который фильтрует взаимные ингредиенты суммарного распределения.

Вместе с тем адекватность величин $\sum \sum_{n \neq m} \rho_{z_n, z_m}(f, t)$ и $\sum \sum_{n \neq m} \chi_{z_n, z_m}(\xi, \tau)$ указывает на то, что решение проблемы подавления интерференционного фона может быть обеспечено за счет соответствующего ядра преобразования $\Phi(\tau, \xi)$, вид которого обеспечил бы при неизменности первой суммы в выражении (8), равенство нулю второй.

В [13, 14] обосновано, что надлежащий выбор ядра приведет к тому, что в выражении (7) интерференционные составляющие могут взаимно компенсировать друг друга.

Действительно, в соответствии со свойствами распределения, значения функции (9) при $n = m$ будут локализоваться вокруг начала координат плоскости ФН, в то время как при $n \neq m$ точка локализации будет смещена относительно указанного значения. Причем смещение будет тем существеннее, чем сильнее различие между $z_n(t)$ и $z_m(t)$. Следовательно, в качестве критерия выбора ядра можно рассматривать условия, при которых в пределах значимой области распределения интерференционные компоненты были бы минимальны.

При этом следует учесть, что уменьшение значимой области неизбежно ведет к снижению уровня сигнальной энергии в результирующем распределении [10]. Здесь важен компромисс между степенью подавления интерференционного фона и частотно-временными размерами области локализации энергии (обработки).

Указанным условиям в полной мере соответствует ядро вида (5). Во-первых, оно отвечает большинству ограничений, накладываемых на ядро. Во-вторых, позволяет регулировать степень концентрации энергии в начале координат области ФН, за счет управления параметром σ_p . В-третьих, хорошо вписывается в концепцию распределений класса Коэна, поскольку при $\sigma_p \rightarrow \infty$ оно ведет к ЧВР Вигнера.

Тогда, подставляя значение (5) в обобщенное распределение Коэна [1]:

$$\rho(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi(\xi t - f\tau - \xi v)] \times \Phi(\tau, \xi) z_a^*(v - \frac{\tau}{2}) z_a(v + \frac{\tau}{2}) dv d\tau d\xi, \quad (10)$$

окончательно получим:

$$\rho_{CW}(f, t; \sigma_p) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi(\xi t - f\tau - \xi v)] \times \exp[-(2\pi\xi\tau)^2 / \sigma_p] z_a^*(v - \frac{\tau}{2}) z_a(v + \frac{\tau}{2}) dv d\tau d\xi. \quad (11)$$

Далее, интегрирование по ξ приводит к следующему виду билинейного ЧВР, получившего название распределение Чоя-Вильямса [3]:

$$\rho_{CW}(f, t; \sigma_p) = \frac{1}{4\sqrt{\pi^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau^2 / \sigma_p}} \times \exp\{-[(v - t)^2 / (4\tau^2 / \sigma_p)] - j2\pi\xi\tau\} \times z_a^*(v - \frac{\tau}{2}) z_a(v + \frac{\tau}{2}) dv d\tau. \quad (12)$$

В практических приложениях часто встречается следующая форма представления ЧВР Чоя-Вильямса [15]:

$$\rho_{CW}(f, t; \sigma_p) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma_p}}{4\sqrt{\pi}|\tau|} e^{-v^2\sigma_p / (16\tau^2)} \times z(t + v + \frac{\tau}{2}) z^*(t + v - \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f\tau} dv d\tau. \quad (13)$$

Распределение (13) локализует обрабатываемый фрагмент в частотно-временной области, тем самым в значительной степени подавляя интерференционный фон (рисунок 2).

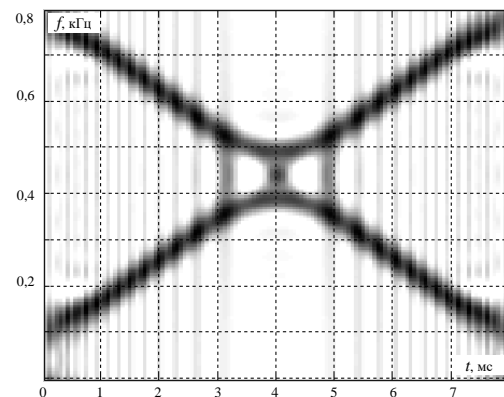


Рис. 2. Фрагмент распределения Чоя-Вильямса тестового двухкомпонентного сигнала

Анализ полученных результатов показывает, что распределение (13) не в полной мере подавляет мешающие компоненты на частотно-временной плоскости, которые проявляются на рисунке 2 в виде вертикальных затемненных полос.

Действующая область обработки, регулируемая ядром (5), позволяет регулировать указанную область независимо как в частотном, так и во времен-

ном направлении. Расширение временной области при одновременном сужении частотной делает результирующее распределение (рисунок 3) близким по своим характеристикам, в том числе и по наличию интерференции, к ЧВР Вигнера (рисунок 1).

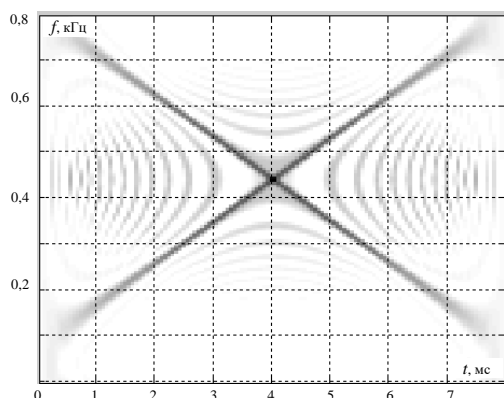


Рис. 3. Фрагмент распределения Чоя–Вильямса тестового двухкомпонентного сигнала (максимальное расширение временной области обработки при одновременном сужении частотной)

В то же время расширение частотной области с одновременным сужением временной делает результирующее распределение Чоя–Вильямса в принципе непригодным для использования его в качестве инструмента обработки. Размытость энергии в пределах значимой области обработки значительно затрудняет определение истинного положения линий мгновенных частот (рисунок 4).

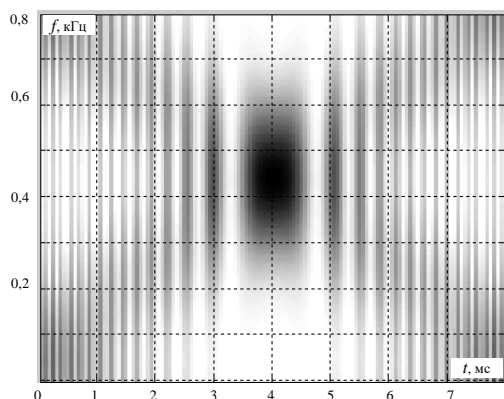


Рис. 4. Фрагмент распределения Чоя–Вильямса тестового двухкомпонентного сигнала (максимальное расширение частотной области обработки при одновременном сужении временной)

Применение ядра (5) дало возможность создания целого класса так называемых распределений «экспоненциального» типа. В частности, приведение выражения (5) к виду:

$$\Phi_R(\tau, \xi) = \exp[-(2\pi\xi\tau)^2/\sigma_p - j\pi\xi\tau], \quad \sigma_p > 0 \quad (14)$$

позволяет получить распределение Рихачека «экспоненциального» типа [8].

При модификации ядра, описываемого выражением (14) имеем плотность распределения активной энергии «экспоненциального» типа [12]:

$$\Phi_A(\tau, \xi) = \frac{1}{2} \exp[-(2\pi\xi\tau)^2/\sigma_v] \cos(\pi\xi\tau), \quad \sigma_p > 0, \quad (15)$$

а преобразование (5) к виду:

$$\Phi_P(\tau, \xi) = j \exp[-(2\pi\xi\tau)^2/\sigma_p] \sin(\pi\xi\tau), \quad \sigma_p > 0 \quad (16)$$

приводит к экспоненциальной плотности распределения «реактивной» энергии [10].

В [16] профессором А.А. Алексеевым получена обобщенная форма для синтеза ЧВР «экспоненциального» типа. С этой целью было предложено введение в (5) дополнительного параметра α_p , регулирующего значимую область главного лепестка, в пределах которого осуществляется сигнальная обработка:

$$\Phi(\tau, \xi) = j \exp[-(2\pi\xi\tau)^2/\sigma_p - j2\pi\alpha_p\xi\tau], \quad \sigma_p > 0. \quad (17)$$

В [3] для модификации ядра (5) предложено использовать мультипликативное дополнение $\exp[-j2\pi\alpha_p\xi\tau]$, позволяющее получить:

$$\Phi(\tau, \xi) = \exp[-(2\pi\xi\tau)^2/\sigma_p] \cdot \exp[-j2\pi\alpha_p\xi\tau]. \quad (18)$$

С учетом (14) обобщенное распределение «экспоненциального» типа принимает следующий вид:

$$\rho_{\pm}^{\alpha_p}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi f\tau) \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} W_{\sigma_p, \alpha_p}^{\pm}(u-t, \tau) z_a\left(u + \frac{\tau}{2}\right) z_a^* \times \right. \\ \left. \times (u - \tau/2) du \right\} d\tau, \quad (19)$$

где

$$W_{\sigma_p, \alpha_p}^{\pm}(u-t, \tau) = \frac{\sqrt{\sigma_p}}{4\sqrt{\pi\tau^2}} \times \left\{ \exp\left(\frac{-(u-t+\alpha_p\tau)^2}{4\tau^2/\sigma_p}\right) \pm \exp\left(\frac{-(u-t-\alpha_p\tau)^2}{4\tau^2/\sigma_p}\right) \right\}. \quad (20)$$

Действительно, при $\alpha_p = 0$ приходим к распределению Чоя–Вильямса. При $\alpha_p = 0,5$ получим модифицированное ЧВР Рихачека, из составляющих которого синтезируется огибающая функции распределения мгновенной энергии с пониженным уровнем интерференционного фона. Однако, в отличие от его классической формы, полученная модификация не имеет отрицательных значений.

В частности, выбор знака (+) в (19) дает модифицируемое распределение активной энергии, а знак (-) приводит к модифицированному распределению «реактивной» (по Рихачеку) энергии. В то же время при $\sigma_p \rightarrow \infty$ ЧВР (19) обращается, в зависимости от знака, в реальную или мнимую часть комплексной функции плотности распределения энергии [16].

Особенностью распределения (19) является возможность регулировки степени подавления интерференции за счет варьирования параметром σ_p .

Следует заметить, что характер паразитного фона может быть различным на каждом срезе ЧВР. Очевидно, что с его изменением желательно менять и значение параметра σ_p , поскольку уменьшение частотно-временных размеров значимой области обработки одновременно с подавлением интерференционного фона ведет к существенному уменьшению уровня положительных (т.е. истинных) компонент распределения.

В [17] предлагается использовать энтропийный подход. Его цель состоит в выборе вектора параметров используемого ЧВР таковым, чтобы результирующая рельефность спектра (определяемая им) была бы максимальной. Другими словами, указанный выбор предполагает, что мера неопределенности (энтропия) спектра будет максимальной.

Для непрерывного случая выражение, учитывающее степень неопределенности, имеет вид:

$$\max_f I = - \int_0^F \rho(f) \log_2 \rho(f) df, \quad (21)$$

где $\rho(f)$ – нормированная спектральная характеристика анализируемого процесса.

В общем случае $\rho(f)$ можно рассматривать как частотный маргинал любого из распределений класса Коэна. Выражение (21) является аналогом соответствующего определения энтропии, где вместо вероятностной характеристики процесса используется энергетическая.

Следует заметить, что «рельефность» описания ЧВР, характеризующая его информационное наполнение, проявляется в изменении соотношений между спектральными коэффициентами мощности по отношению к равномерному спектру.

Тогда для численного расчета энтропии целесообразно воспользоваться следующим выражением:

$$I = -P \log \left(\frac{P}{N} \right) + \sum_{k=1}^N P_k \log P_k = \sum_{k=1}^N P_k \log \left(\frac{P_k N}{P} \right), \quad (22)$$

здесь P – суммарная мощность сигнала.

«Энтропия» может быть вычислена не только для дискретного спектра. Очевидно, что данный подход может быть использован и в отношении ЧВР. В частности, в [18] таким образом оценивалась «рельефность» срезов билинейных распределений.

В рассматриваемом случае использования распределения «экспоненциального» типа в качестве энергетической характеристики может выступать плотность распределения энергии. В каждый момент времени она является функцией параметра подавления интерференционного фона σ_p и функцией эффективной длительности окна T , т.е. $\rho(f, t; T, \sigma_p)$. Динамика изменения качества распределения предполагает существование определенного оптимального вектора параметров (T, σ_p) в каждый

момент времени, который формально может быть записан следующим образом:

$$\max_{T, \sigma_p} I_t(T, \sigma_p) = \max_{T, \sigma} \int_0^\infty \rho(f, t; T, \sigma_p) \times \log_2 \frac{\rho(f, t; T, \sigma_p)}{P(t)} df, \quad (23)$$

где $P(t) = \int_0^\infty f \times \rho(f, t; T, \sigma_p) df$ характеризует среднее значение энергии ЧВР в момент времени t .

К сожалению, непосредственное использование критерия (23) связано с трудностями, обусловленными наличием отрицательных значений у отдельных форм ЧВР. Попытки синтезировать ЧВР с положительными значениями, предпринятые в [8], настолько снижают качество результирующих распределений, что они по своим свойствам оказываются не лучше спектрограмм. Использование модуля ЧВР не имеет под собой серьезных оснований.

В [16] предложено для синтеза ЧВР со свойствами «положительности» на всем временном интервале использовать комплексную функцию Рихачека, путем добавления в (23) выражения для огибающей ЧВР мгновенной энергии. К сожалению, по степени концентрации сигнальных компонент в континууме точек их мгновенных частот и уровню паразитного интерференционного фона, огибающая ЧВР мгновенной энергии заметно уступает всем модификациям ЧВР Вигнера и Чоя–Вильямса с ядром (5).

С рассмотренных позиций более интересным видится подход, основанный на использовании только положительной части распределения.

Базируясь на таком подходе, для ЧВР (19) можно записать следующее условие для расчета энтропии:

$$I_t(\sigma_p) = \int_0^{F_{\max}} \tilde{\rho}_{\sigma_p}^{\alpha_p}(f, t) \log_2 \left[\frac{\tilde{\rho}_{\sigma_p}^{\alpha_p} F_{\max}}{\int_0^{F_{\max}} \tilde{\rho}_{\sigma_p}^{\alpha_p}(f, t) df} \right] df, \quad (24)$$

где

$$\tilde{\rho}_{\sigma_p}^{\alpha_p}(f, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho_{\sigma_p}^{\alpha_p}(f, t) < 0; \\ \frac{\rho_{\sigma_p}^{\alpha_p}(f, t)}{\int_0^{F_{\max}} \rho_{\sigma_p}^{\alpha_p}(f, t) df} & \text{при } \rho_{\sigma_p}^{\alpha_p}(f, t) \geq 0. \end{cases} \quad (25)$$

Проведенные исследования в [10] показали, что наиболее значимая величина σ_p , влияющая на степень подавления интерференционного фона, лежит в интервале $0,1 < \sigma_p < 10$.

Так, на рисунке 5 представлена нормированная величина функции (24) в зависимости от значения параметра σ_p для многокомпонентного сигнала вида (1).

Анализ результатов (рисунок 5), позволяют заключить, что функция $I_t(\sigma_p)$ является гладкой и имеет один выраженный экстремум при $\sigma_p = 1$.

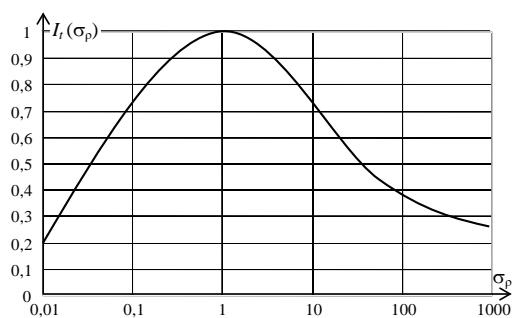


Рис. 5. Зависимость «рельефности» (информативности) распределения от параметра подавления интерференционного фона

Результаты эксперимента в целом согласуются с теоретическими положениями. Действительно, ухудшение значений $I_t(\sigma_p)$ в диапазоне $\sigma_p > 10$ обусловлено тем, что уменьшение действующей частотно-временной области ведет к снижению концентрации сигнальной энергии ЧВР и, как следствие, к ухудшению разрешающей способности, поскольку фильтрующее ядро подавляет не только интерференционный фон, но и сигнальные компоненты. В то же время, при выборе значения $\sigma_p < 0,1$, степень подавления интерференции будет недостаточной. В результате сопутствующий интерференционный фон не позволит однозначно идентифицировать сигнальные компоненты.

Применение сглаживающих функций для подавления интерференционных компонент

Другое направление поиска продуктивных методов устранения интерференционных явлений, связано с использованием псевдораспределений.

Так, анализ континуальной формы распределения Вигнера [1] показывает, что при расчете каждой из единичных площадок частотно-временных матриц распределения требуется обработка входного процесса в бесконечных пределах:

$$\rho_w(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} z_a^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) z_a \times \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau. \tag{26}$$

Указанное обстоятельство в значительной степени снижает продуктивность использования частотно-временного подхода при анализе непрерывных процессов. В целях устранения указанного недостатка в [2] предложено ограничить временной интервал наблюдения, т.е. использовать некоторую функцию окна $h_0(\tau)$, в пределах которой и проводились бы вычисления.

Тогда в результате весовой обработки сигнал $z_a(\tau)$ будет иметь следующий вид:

$$z_t(\tau) = z_a(\tau)h(\tau - t), \tag{27}$$

где t – момент времени, указывающий на положение функции окна.

Распределение Вигнера от сигнала вида (27) равносильно распределению (26) для сигнала $z_a(\tau)$, но в условиях конечного временного интервала, т.е. $\rho_t(f, t)|_{\tau=t}$.

В то же время распределение вида $\rho_t(f, t)|_{\tau=t}$ можно синтезировать, используя обобщенное ЧВР Коэна (выражение (46) в [1]):

$$\rho(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(f - \xi, t - \tau) \rho_w(\xi, \tau) d\tau d\xi. \tag{28}$$

В итоге получим:

$$\rho_t(f, t)|_{\tau=t} = \int_{-\infty}^{\infty} U_h(f - \xi, t - \tau) \rho_w(\xi, \tau) d\xi. \tag{29}$$

Очевидно, что для расчета $\rho_t(f, t)|_{\tau=t}$ нет необходимости рассматривать всю совокупность значений временных отчетов, заданных формулой (29). Вполне достаточно ограничиться значениями, расположенными на линии $\tau = t$:

$$\rho_t(f, \tau)|_{\tau=t} = \int_{-\infty}^{\infty} U_h(f - \xi, 0) \rho_w(\xi, \tau) d\xi. \tag{30}$$

Так как в левой части (30) априори – распределение Вигнера (в ограниченных интервалах), то такой результат возможен лишь только в том случае, если в качестве весовой функции будет выступать распределение Вигнера функции окна вида:

$$U_h(f - \xi, 0) = \rho_h(f - \xi, 0). \tag{31}$$

Формулу (30) можно представить в виде:

$$\rho_t(f, \tau)|_{\tau=t} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_h(f - \xi, 0) \rho_w(\xi, \tau) d\xi. \tag{32}$$

Обозначим в (32) результат следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_w(f, t) &= \rho_t(f, \tau)|_{\tau=t} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_h(f - \xi, 0) \rho_w(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned} \tag{33}$$

Распределение вида $\tilde{\rho}_w(f, t)$ в [2] определено как псевдораспределение Вигнера (ПРВ).

Анализ выражения (30) показывает, что $\tilde{\rho}_w(f, t)$ связано с распределением (26) операцией свертки по частоте исходной функции Вигнера с независимой от времени функцией окна, форма которого соответствует виду исходной функции.

Для фиксированного значения t ПРВ можно рассматривать, как функцию от f , которая получается операцией фильтрации $\rho_w(f, t)$ с импульсной характеристикой $\rho_h(f - \xi, 0)$ (здесь переменная f как бы играет роль времени [8]). Следовательно, ПРВ (рисунк 6) представляет сглаженную по частоте версию традиционного ЧВР Вигнера.

С другой стороны, использование при формировании ЧВР сигнала вида (27) равносильно введению в распределение дополнительного окна следующего вида: $h(\tau/2)h^*(-\tau/2)$.

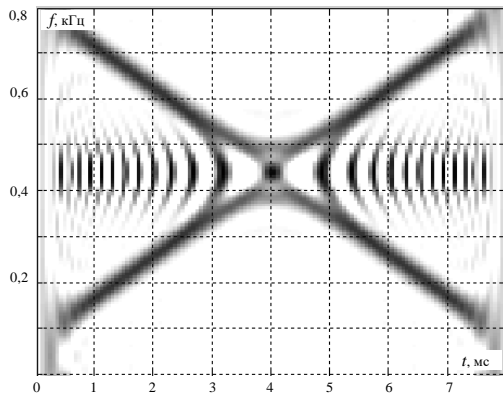


Рис. 6. Фрагмент псевдораспределения Вигнера тестового двухкомпонентного сигнала

Тогда с учетом симметричной формы записи ПРВ во временной области можно представить в следующем виде:

$$\tilde{\rho}_W(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h^* (-\tau/2) z_a^*(t - \tau/2) \times h(\tau/2) z_a(t + \tau/2) e^{-j2\pi f \tau} d\tau. \quad (34)$$

Для частотной области:

$$\tilde{\rho}_W(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\frac{\nu}{2}) F_a(f + \frac{\nu}{2}) \times H^*(\frac{\nu}{2}) F_a^*(f - \frac{\nu}{2}) e^{j2\pi t \nu} d\nu, \quad (35)$$

где H^* - преобразование Фурье от функции окна.

Отметим, что псевдо-ЧВР Вигнера является распределением класса Коэна, синтезируемого из обобщенного ЧВР Коэна (выражение (28) в [1]) при соответствующем выборе ядра вида:

$$\Phi(\tau, \xi) = h(\frac{\tau}{2}) \cdot h^*(\frac{\tau}{2}). \quad (36)$$

Ядро (36) удовлетворяет ограничениям № 1, 2, 3, 5, 8, накладываемым на ядро преобразования (таблица 1, которая приведена в [1] и дублируется здесь), что позволяет предположить о наличии указанных свойств у псевдо-ЧВР Вигнера.

В частности, свойство № 6 (временных маргиналов) имеет место при условии равенства нулю значения мгновенной частоты в момент времени $\tau = 0$.

Единственное невыполнение приходится на свойства № 7 (частотных маргиналов) и № 9 (дифференцируемости по частоте) в силу несоответствия первой части накладываемых ограничений.

Действительно, среднее время T_{z_t} в этом случае определяется по формуле:

$$T_{z_t}(f) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} T_z(\xi) |F_a(\xi)|^2 \rho_h(f - \xi, 0) d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} |F_a(\xi)|^2 \rho_h(f - \xi, 0) d\xi}. \quad (37)$$

ТАБЛИЦА 1. Желательные свойства ЧВР и соответствующие им ограничения, накладываемые на ядро преобразования Коэна

№ п/п	Свойства ЧВР	Ограничения, накладываемые на ядро преобразования Коэна
1	$z_a(t - t_0) \rightarrow \rho(f, t - t_0)$	$\Phi(\tau, \xi)$ не зависит от t
2	$F_a(f - f_0) \rightarrow \rho(f - f_0, t)$	$\Phi(\tau, \xi)$ не зависит от f
3	$\begin{cases} z_a(t) = 0, \\ \rho(f, t) = 0. \end{cases}$ при $ t > T$	$\int \Phi(\tau, \xi) e^{j2\pi \xi \tau} d\xi = 0$ при $ \tau < 2 t $
4	$\begin{cases} F_a(f) = 0, \\ \rho(f, t) = 0. \end{cases}$ при $ f > \Omega/2\pi$	$\int \Phi(\tau, \xi) e^{-j2\pi \xi \tau} d\tau = 0$ при $ \xi < 2 f $
5	$\rho(f, t) = \rho^*(f, t)$	$\Phi(\tau, \xi) = \Phi^*(-\tau, -\xi)$
6	$\int \rho(f, t) df = z_a(t) ^2$	$\Phi(0, \xi) = 1$ при всех ξ
7	$\int \rho(f, t) dt = F_a(f) ^2$	$\Phi(\tau, 0) = 1$ при всех τ
8	$\frac{\int f \cdot \rho(f, t) df}{\int \rho(f, t) df} = \frac{d}{dt} \arctg \frac{z(t)}{z'(t)}$	$\begin{cases} \Phi(0, \xi) = 1, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi(\tau, \xi) _{\tau=0} \end{cases}$ при всех ξ
9	$\frac{\int t \cdot \rho(f, t) dt}{\int \rho(f, t) dt} = -\frac{d}{df} \arctg \frac{b(f)}{a(f)}$	$\begin{cases} \Phi(\tau, 0) = 1, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(\tau, \xi) _{\xi=0} \end{cases}$ при всех τ
10	$\rho(f, t) \geq 0$ при всех f и t	$\Phi(\tau, \xi)$ - ФН весовой функции $h(t)$

В то же время мгновенный спектр, с точки зрения синтеза близкий по своей природе к псевдо-ЧВР Вигнера, удовлетворяет лишь ограничениям № 1, 2, 5 соответствующих свойств (таблица 1). Поскольку отсутствует возможность выполнения следующих условий:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_a(f, t)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |z_a(\tau)|^2 |h(\tau - t)|^2 d\tau, \quad (38)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_a(f, t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F_a(\xi)|^2 |H(\xi - f)|^2 d\xi, \quad (39)$$

свойства № 3 и 4 недоступны для любых форм мгновенных спектров. Указанные ограничения объясняются тем, что (38) и (39) вместо значения мгновенной энергии дают усредненную и взвешенную, в пределах длительности весовой функции, плотность энергии. Отсутствие же свойств № 6–9 объясняется неотрицательностью значения $|F_a(f, t)|^2$ [8].

Следует заметить, что под понятием отсутствие тех или иных свойств для мгновенных спектров следует понимать их строгое невыполнение, что, однако, не исключает их соблюдение в среднем. Следовательно, при незначительных изменениях мгновенных частот в пределах временного интервала эффективной длительности весовых функций применение различных форм представления мгновенных спектров вполне допустимо. В противном случае необходим переход к псевдораспределениям, позволяющих снять с анализируемых сигналов ограничения по конечности их энергии.

В общем случае понятие псевдораспределения может быть обобщено и на другие ЧВР в классе Коэна. В том числе и к распределениям мгновенной энергии. В результате будут получены псевдораспределения огибающей и полной фазы [10].

Наличие положительных свойств у различных форм ЧВР позволяет сделать заключение о том, что все множество распределений класса Коэна, обладает свойством унитарной эквивалентности [20].

Физический смысл указанного понятия основывается на том, что любые частотно-временные сдвиги, происходящие в исходном сигнале, вызывают аналогичные изменения в соответствующих ему распределениях:

$$\begin{aligned} z(t) &\rightarrow z(t - t') e^{-j2\pi f' t} \\ \downarrow &\quad \downarrow \\ F_z(f, t) &\rightarrow F_z(f - f', t - t'). \end{aligned} \quad (40)$$

Соблюдение частотно-временной инвариантности для синтезируемых распределений выступает в качестве мощного признака, указывающего на их принадлежность к ЧВР класса Коэна.

Условие (40) можно рассматривать в качестве критерия, позволяющего осуществлять поиск частотно-временных представлений, наиболее адекватно (в соответствии с решаемой задачей) характеризующих распределение энергии анализируемых процессов в пространстве «частота – время».

Псевдо-ЧВР в значительной степени расширили область практического применения билинейных распределений. Однако их ограничения, связанные с усреднением энергии в пределах окна анализа, требуют продолжения поиска форм описания сигналов с лучшими метрологическими свойствами.

К сожалению, псевдораспределения только частично решают указанную проблему борьбы с интерференцией, поскольку применение сглаживающих функций ведет к подавлению негативных компонент только в частотной области, что обусловлено свойствами одномерности сглаживающих функций (рисунок 6).

Вместе с тем анализ результатов применения псевдо-ЧВР Вигнера показывает, что для подавления мешающих компонент во временной области необходимо осуществлять предварительное сглаживание обрабатываемого процесса. Следовательно, аналитическое выражение такого преобразования будет иметь следующий вид [10]:

$$\hat{\rho}_W(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} g_t(v - t) z_a^*(v - \frac{\tau}{2}) \times z_a(v + \frac{\tau}{2}) dv e^{-j2\pi f \tau} d\tau, \quad (41)$$

здесь $g_t(v)$ – сглаживающая функция для $z_a(v)$.

Полученное распределение можно определить как сглаженное ПРВ – выражение можно считать обобщенным по отношению к (34).

Действительно, при $g_t(t) = \delta(t)$ из (41) получаем классическую формулу ПРВ. Результат обработки тестового сигнала на основе сглаженного псевдо-ЧВР Вигнера представлен на рисунке 7.

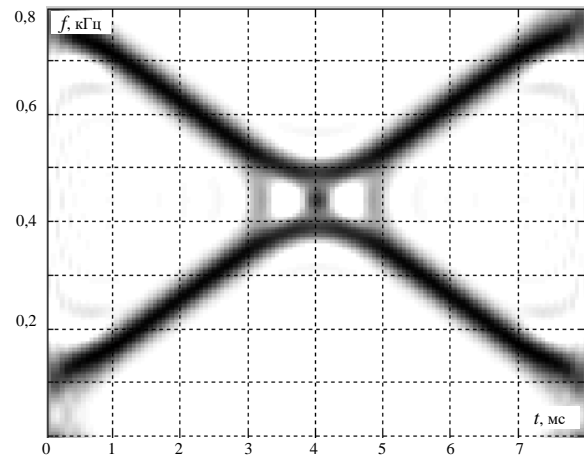


Рис. 7. Фрагмент сглаженного псевдораспределения Вигнера тестового двухкомпонентного сигнала

Процедуру синтеза сглаженного псевдо-ЧВР Вигнера удобно рассматривать с точки зрения предварительной обработки ядра преобразования независимыми весовыми функциями в частотной h_0 и во временной g_t области. Управление разрешающей способностью h_0 и g_t позволяет контролировать уровень подавления интерференции.

Действительно, преобразуем форму обобщенного ЧВР Коэна (выражение (46) в [1]):

$$\begin{aligned} \rho(f, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(f - \xi, t - v) \int_{-\infty}^{\infty} z_a^*(v - \frac{\tau}{2}) \times \\ &\quad \times z_a(v + \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi \xi \tau} d\tau dv d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} U(f - \xi, t - v) e^{-j2\pi \xi \tau} d\xi \right\} \times \\ &\quad \times z_a^*(v - \frac{\tau}{2}) z_a(v + \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi \xi \tau} d\tau dv. \end{aligned} \quad (42)$$

В (42) значение, выделенное в фигурные скобки, представляет не что иное, как обратное преобразование Фурье от весовой функции преобразования. Тогда с учетом выражения (46) в [1] имеем двойное интегрирование по частоте и одно по времени. Следовательно, результирующее значение будет представлять некоторую функцию двойного аргумента $[\Phi(t - v, \tau) e^{-j2\pi f \tau}]$. Таким образом формулу (42) запишем в виде следующего выражения:

$$\rho(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t - v, \tau) z_a^*(v - \frac{\tau}{2}) \times z_a(v + \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f \tau} d\tau dv. \quad (43)$$

Полученное выражение в целом не противоречит здравому смыслу. Так, подставляя вместо $\phi(t, \tau)$ δ -функцию, из (43) получаем распределение Вигнера.

Согласно равенству (43), синтез ЧВР можно трактовать как свертку по времени ядра вида $\phi(t, \tau)$ и корреляционного процесса $z_a^*(v - \tau/2)z_a(v + \tau/2)$, с последующей реализацией процедуры преобразования Фурье по переменной времени t .

Обобщенное представление (42) можно рассматривать и в терминах процедуры преобразования Фурье:

$$\rho(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_p(\xi, f - \varsigma) F_a^* \left(f - \frac{\xi}{2} \right) \times \times F_a \left(f + \frac{\xi}{2} \right) e^{j2\pi\xi t} d\varsigma d\xi, \quad (44)$$

где

$$E_p(\xi, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t, \tau) \times \exp[-j2\pi(\xi t + f\tau)] dt d\tau \quad (45)$$

Тогда свертка осуществляется в частотной области, с последующим выполнением обратного преобразования Фурье по переменной ξ .

Достоинства полученных выражений (43) и (44) в том, что они допускают синтез новых форм распределений на базе существующих ЧВР. Так, для формирования псевдораспределения Вигнера используется действительная и симметричная функция скользящего окна $h_0(t)$. В этом случае ядро преобразования будет иметь вид:

$$\phi(t, \tau) = \delta(t)h^2\left(\frac{\tau}{2}\right), \quad (46)$$

$$E_p(\xi, f) = 4H(2f) * H(2f), \quad (47)$$

где $H(f)$ – преобразование Фурье $h(\tau)$; (*) – процедура одномерной свертки.

Аналитический результат (46) и (47) указывает на высокое временное разрешение псевдо-ЧВР. Вместе с тем согласно (47) ядро не зависит от частотного параметра ξ , поэтому псевдораспределение не способно подавлять интерференционные компоненты, расположенные вдоль оси $\xi = 0$ (рисунк 6).

Скользящие окна используются и для построения спектрограмм. В этом случае ядро будет иметь вид:

$$\phi(t, \tau) = h\left(t + \frac{\tau}{2}\right)h\left(t - \frac{\tau}{2}\right), \quad (48)$$

$$E_p(\xi, f) = H\left(f + \frac{\xi}{2}\right)H\left(f - \frac{\xi}{2}\right). \quad (49)$$

Анализ (48) показывает, что поскольку ядро зависит от t , то оно в значительной степени будет сглаживать сигнальную энергию (возникает эффект размытости). В то же время величина $E_p(\xi, f)$ в (49) осуществляет фильтрацию как по переменной

f , так и по ξ . Следовательно, все ЧВР, построенные на основе мгновенных спектров (спектрограммы), будут подавлять интерференцию, но получаемые при этом оценки частоты будут «размыты» (сглажены).

Данный вывод подтверждают результаты обработки тестового двухкомпонентного сигнала, представленные на рисунке 8.

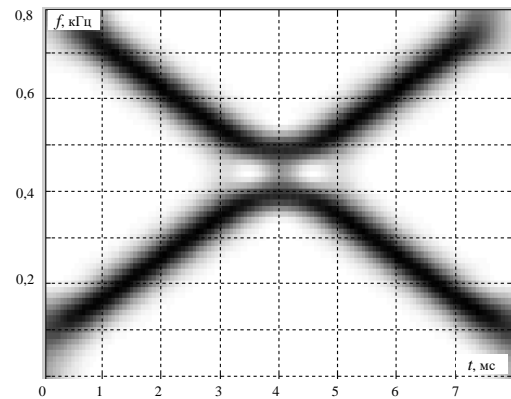


Рис. 8. Фрагмент спектрограммы тестового двухкомпонентного сигнала

Следует заметить, что ЧВР Вигнера не единственное распределение, используемое в качестве базовой функции при синтезе новых частотно-временных описаний. В этих целях также применяется ЧВР Бьорна–Джордона [11]:

$$\rho_{BJ}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\tau|} \int_{t-|\tau|/2}^{t+|\tau|/2} z_a^* \left(v - \frac{\tau}{2} \right) \times \times z_a \left(v + \frac{\tau}{2} \right) dv e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (50)$$

Особенность функции (50) состоит в локализации временной области, в пределах которой обрабатывается сигнал. В результате ограничивается количество спектральных компонент, взаимное воздействие которых друг на друга как раз и приводит к образованию интерференции. В этих целях в [11] предложено результат вычислений внутреннего интеграла ЧВР (50) сглаживать окном $h_0(\tau)$:

$$\rho_{ZAM}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[h_0(\tau) \int_{t-|\tau|/2}^{t+|\tau|/2} z_a^* \left(v - \frac{\tau}{2} \right) \times \times z_a \left(v + \frac{\tau}{2} \right) dv \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (51)$$

Полученное выражение (51) называют распределением Дзао–Атласа–Маркса [10, 21].

Фрагмент ЧВР тестового двухкомпонентного сигнала, полученного на основе функции (51), представлен на рисунке 9. Механизм подавления интерференционного фона в ЧВР (51) по своей природе аналогичен (41).

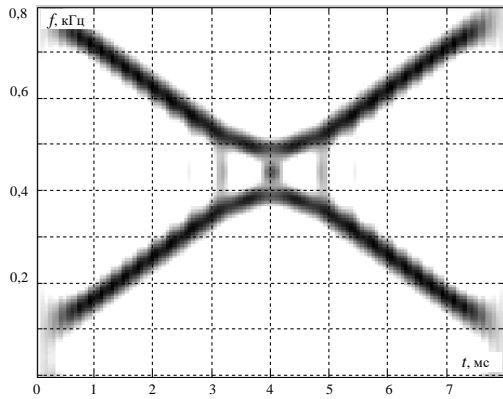


Рис. 9. Фрагмент распределения Дзао-Атласа-Маркса тестового двухкомпонентного сигнала

Действительно, временной размах билинейной корреляции в ЧВР Дзао-Атласа-Маркса определяется переменной t , а управление аргументом τ при сглаживании результата, вычисленного внутренним интегралом, дает возможность регулировать параметры частотного разрешения результирующего распределения.

Результаты, представленные на рисунке 9, указывают на высокую фильтрующую способность распределения Дзао-Атласа-Маркса, однако по степени концентрации полезных сигнальных компонент вдоль линий мгновенных частот оно уступает сглаженному псевдо-ЧВР Вигнера [10].

Дальнейшие поиски решения проблемы снижения интерференции преимущественно связаны с экспериментами по выбору соответствующей формы ядра в (43). К таким распределениям следует отнести обобщенное прямоугольное ЧВР [22]:

$$\begin{aligned} \rho_{GRD}(f, t) = & \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\phi(t-v, \tau)}{|\tau|^\alpha} \text{sinc}\left(\frac{2\phi(t-v, \tau)v}{|\tau|^\alpha}\right) \times & (52) \\ \times K(t, v, \tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau dv, & \end{aligned}$$

где

$$K(t, v, \tau) = z^* \left(t + v - \frac{\tau}{2} \right) \cdot z \left(t + v + \frac{\tau}{2} \right);$$

α – параметр, определяющий степень асимметрии функции sinc.

В общем случае формула (52) не определяет форму ядра. Однако сам факт применения функции sinc обеспечивает интервалу обработки прямоугольность формы при любом выбор $\phi(t, v, \tau)$.

Модифицированные формы частотно-временных распределений

Следующее направление поиска приемлемых форм ЧВР с низким уровнем интерференционного фона связано с модификацией ядер в рамках известных аналитических описаний, теперь уже сглаживающих функций. В частности, к таковым следует отнести распределение с ядром Хеннинга [15]:

$$\begin{aligned} \rho_{RIDH}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\tau) \left[\int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} \frac{g_t(v)}{|\tau|} \times \right. & (53) \\ \left. \times \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi v}{\tau}\right) \right) K(t, v, \tau) dv \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau. & \end{aligned}$$

Выражение (53) представляет собой частотно-временное распределение с пониженным уровнем интерференции за счет использования ядра Хеннинга [22].

Близким по своим свойствам к ЧВР с ядром Хеннинга следует отнести и распределение с ядром, в основе которого лежит функция с треугольной характеристикой [10, 11]:

$$\begin{aligned} \rho_{RIDT}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\tau) \left[\int_{t-|\tau|/2}^{t+|\tau|/2} \frac{2g_t(v)}{|\tau|} \times \right. & (54) \\ \left. \times \left(1 - \frac{2|v|}{|\tau|} \right) K(t, v, \tau) dv \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau. & \end{aligned}$$

К семейству рассматриваемых ЧВР следует отнести и распределение с ядром Бесселя [15]:

$$\begin{aligned} \rho_{RIDB}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\tau) \left[\int_{t-|\tau|/2}^{t+|\tau|/2} \frac{2g_t(v)}{\pi |\tau|} \times \right. & (55) \\ \left. \times \sqrt{1 - \left[\frac{v-t}{\tau}\right]^2} \cdot K(v, \tau) dv \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau, & \end{aligned}$$

а также – распределение Баттерворта, в основе ядра которого лежит функция с амплитудно-частотной характеристикой соответствующего фильтра [15]:

$$\begin{aligned} \rho_{DB}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma}}{2|\tau|} e^{-|v|\sqrt{\sigma}/|\tau|} \times & (56) \\ \times K(t, v, \tau) e^{-j2\pi f\tau} dv d\tau. & \end{aligned}$$

Особое место среди рассматриваемых ЧВР занимает так называемое распределение, ядро которого базируется на коэффициенты биномиального разложения [15]:

$$\begin{aligned} \rho_{RIDBC}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{t-|\tau|/2}^{t+|\tau|/2} \frac{1}{2^{2|\tau|+1}} \times \right. & (57) \\ \left. \times \left(\frac{2|\tau|+1}{|\tau|+v+1} \right) K(t, v, \tau) dv \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau. & \end{aligned}$$

Дискретная форма (57) очень удобна с точки зрения применимости в практических приложениях, базируемых на технологии цифровой обработки сигналов.

Следует заметить, что поиск приемлемых форм ядра может быть, в принципе, бесконечным. Однако все возможные ЧВР, синтезированные на основе рассмотренной технологии, по своим свойствам

будут близки к семейству распределений «экспоненциального» типа. В качестве примера на рисунке 10 представлено ЧВР с ядром Бесселя тестового двухкомпонентного сигнала.

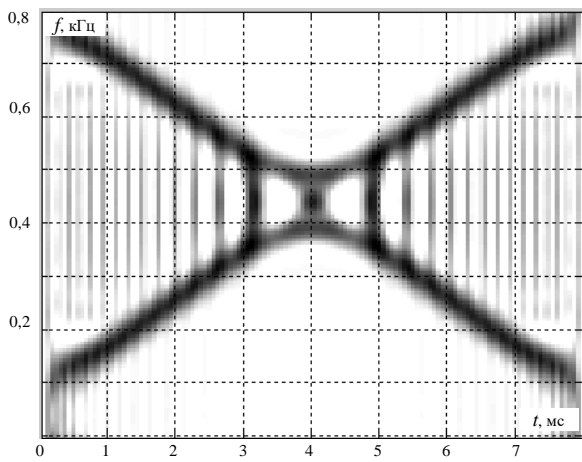


Рис. 10. Фрагмент распределения с ядром Бесселя тестового двухкомпонентного сигнала

Главное отличие каждого из ЧВР рассмотренного семейства заключается лишь в реализационной сложности ядра той или иной формы.

Возвращаясь к псевдораспределениям, следует отметить, что псевдораспределение активной энергии Рихачека часто называют распределением Маргенау–Хилла [8]:

$$\rho_{MH}(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\tau)}{2} [z(t + \tau)z^*(t) + z(t)z^*(t - \tau)] e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (58)$$

Аналитическое выражение (58) очень удобно с точки зрения построения на его основе быстрых вычислительных алгоритмов с применением технологии цифровой обработки сигналов.

Рассмотренные подходы к синтезу билинейных распределений довольно полно раскрывают их природу с математической точки зрения. Однако многие из представленных аналитических представлений не всегда удобны в практическом плане.

В связи с указанными обстоятельствами, более привлекательным видится метод прямого синтеза билинейных ЧВР из распределений первого порядка. В частности, для получения ПРВ (34) достаточно осуществить свертку двух спектрограмм.

Действительно, распределение Вигнера в частотной области имеет следующий вид:

$$\rho_W(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_a^*\left(f - \frac{v}{2}\right) F_a\left(f + \frac{v}{2}\right) e^{j2\pi tv} dv. \quad (59)$$

Учитывая, что F_a^* представляет собой преобразование Фурье от сигнала вида z_a^* , представим исходное выражение следующим образом [23]:

$$\rho_W(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} z_a^*(\tau) e^{-j2\pi(f - \frac{v}{2})\tau} d\tau \right]^* \times \int_{-\infty}^{\infty} z_a(\tau) e^{-j2\pi(f + \frac{v}{2})\tau} d\tau \times e^{j2\pi tv} dv. \quad (60)$$

В полученном преобразовании введем для каждого из сомножителей, выделенных квадратными скобками, оконные функции, учитывая, что в качестве переменной x в подынтегральных выражениях используются значения $(f + v/2)$ и $(f - v/2)$ соответственно:

$$\tilde{\rho}_W(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau - t) z_a^*(\tau) e^{-j2\pi(f - \frac{v}{2})\tau} d\tau \right]^* \times \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\tau + t) z_a(\tau) e^{-j2\pi(f + \frac{v}{2})\tau} d\tau \times e^{j2\pi tv} dv. \quad (61)$$

Очевидно, выделенные в квадратные скобки части представляют модуль оконного преобразования Фурье сигнала, по сути – мгновенный спектр.

Следовательно, после соответствующей замены, предложенной в [23], получим выражение:

$$\tilde{\rho}_W(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_z^*\left(f - \frac{v}{2}, t\right) S_z\left(f + \frac{v}{2}, t\right) e^{j2\pi tv} dv. \quad (62)$$

Конечное выражение представляет результат обратного оконного преобразования Фурье от свертки комплексно сопряженных спектрограмм.

Результирующее выражение (62) открывает новый подход к разработке продуктивных ПРВ. Действительно, его можно интерпретировать как замену сигнала в исходном распределении Вигнера на его мгновенный спектр (оконным преобразованием Фурье), вычисляемый по формуле. Общий вид аналитического выражения, определяющего указанную операцию, можно представить формулой [26]:

$$S_z(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) h(\tau - t) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau, \quad (63)$$

где $S_z(f, t)$ – результат представления процесса на частотно-временном плане, называемый оконным преобразованием Фурье (преобразование Фурье на коротком интервале времени).

Поскольку представленный подход не меняет природы синтезируемого ЧВР, то, следовательно, ему присущи те же недостатки, которые свойственны псевдораспределению Вигнера (34). Прежде всего, функции (63) и (34) не обладают свойством получения точного маргинального распределения по времени (свойство 7 в таблице 1), поскольку не удовлетворяют ограничению на ядро преобразования ($\Phi(\tau, 0) \equiv 1$ при всех τ) [10, 11].

Заключение

К сожалению, точного решения задачи полного подавления интерференционного фона при обработке многокомпонентных сигналов, в рамках известных подходов, не существует.

Билинейные ЧВР класса Коэна, в общем случае, являются подоптимальными, поэтому конкретный тип распределения сигнала должен определяться целью проводимой обработки.

Таким образом, для алгоритмов обработки, построенных на рассмотренных выше принципах, проблема разделения двух близко расположенных по частоте сигналов имеет место. Трудно рассчитывать на ее решение в явном виде, поскольку даже доказательство существования такого решения проблематично.

Следовательно, всегда имеется возможность дальнейшего поиска эффективных процедур обра-

ботки сигналов в приложении к практическим задачам радиомониторинга [24]. Очевидно, что он должен быть направлен на оптимизацию сглаженных форм псевдораспределений, обладающих пониженным уровнем интерференционного фона.

Другим продуктивным подходом к анализу и обработке нестационарных сигналов является использование многомерных описаний функции плотности распределения их энергии (полиспектральные представления и кумулянты [25]).

Несмотря на указанные проблемы, билинейные распределения все более активно используются в решении практических задач обработки сигналов, что следует из работ [26–31].

Несмотря на то, что теория частотно-временного анализа считается уже сформированной, проводимые исследования, в частности [32], открывают новые возможности билинейных распределений.

Список используемых источников

1. Дворников С.В. Теоретические основы синтеза билинейных распределений энергии нестационарных процессов в частотно-временном пространстве (обзор) // Труды учебных заведений связи. 2018. Т. 4. № 1. С. 47–60.
2. Claassen T.A.C.M., Meulenbrauker W.F.G. The Wigner Distribution – a Tool for Time-Frequency Signal Analysis. Part 1, 2, 3 // *Phllips Journal of Research*. 1980. Vol. 35. PP. 217–250, 276–300, 372–389.
3. Choi H., Williams W. Improved Time-Frequency Representations of Multicomponent Signals Using Exponential Kernels // *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* 1989. Vol. 37. PP. 862–871.
4. Дворников С.В. Теоретические основы представления сигнала в аналитическом виде функциями его огибающей и полной фазы // *Научное приборостроение*. 2006. Т. 16. № 4. С. 106–111.
5. Дворников С.В., Алексеева Т.Е. Распределение Алексеева и его применение в задачах частотно-временной обработки сигналов // *Информация и космос*. 2006. № 3. С. 9–20.
6. Финк Л.М. Теория передачи дискретных сообщений. М.: Сов. радио, 1970. 728 с.
7. Дворников С.В., Кудрявцев А.М. Теоретические основы частотно-временного анализа кратковременных сигналов: монография. СПб.: ВАС, 2010. 240 с.
8. Cohen L. Time-Frequency Distribution – a Review // *Proceedings of the IEEE*. 1989. Vol. 77. Iss. 7. PP. 941–981.
9. Алексеев А.А., Аладинский В.А., Железняк В.К., Комарович В.Ф., Дворников С.В. Применение методов частотно-временной обработки акустических сигналов для анализа параметров реверберации // *Научное приборостроение*. 2001. Т. 11. № 1. С. 65–76.
10. Дворников С.В. Теоретические основы синтеза билинейных распределений. СПб.: ВАС, 2007. 268 с.
11. Cohen L. *Time-Frequency Analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995.
12. Алексеев А.А. Частотно-временной анализ сигналов связи и радиотехнического обеспечения. Л.: ВАС, 1987. 96 с.
13. Cohen L. Generalized Phase-Space Distribution Function // *Journal of Mathematical Physics*. 1966. Vol. 7. Iss. 5. PP. 781–786.
14. Дворников С.В. Теоретические основы синтеза частотно-временных представлений класса Коэна // *Информация и космос*. 2008. № 3. С. 16–24.
15. Auger F., Flandrin P., Goncalves P., Lemoine O. *Time-Frequency Toolbox. Reference Guide*. 2005. 179 p.
16. Алексеев А.А., Чеченев С.Ю., Кириллов А.Б. Анализ сигналов на основе функций распределения мощности в условиях многосигнального воздействия // *Радиотехника*. 1993. № 10–12. С. 32–37.
17. Kesler S., Haykin S. The Maximum Entropy Method Applied to the Spectral Analysis of Radar Clutter // *IEEE Transactions on Information Theory*. 1978. Vol. 24. Iss. 2. PP. 269–272.
18. Алексеев А.А., Кириллов А.Б. Модификация функций неопределенности и распределения Вигнера в базе Уолша // *Радиотехника и электроника*. 1993. № 9. С. 1605–1614.
19. Алексеев А.А., Кожевников С.В. и др. Функции распределения мощности и частотно-временной анализ радиосигналов // *Радиоэлектроника (Изв. высш. учеб. заведений)*. 1986. Т. 29. № 9. С. 79–82.
20. Baraniuk R.G. Covariant Time-Frequency Representations through Unitary Equivalence // *IEEE Signal Processing Letters*. 1996. Vol. 3. № 3. PP. 79–81.
21. Дворников С.В., Бородин Е.Ю., Маджар Х., Махлуф Ю.Х. Частотно-временное оценивание параметров сигналов на основе функций огибающих плотности распределения их энергии // *Информация и космос*. 2007. № 4. С. 41–45.
22. Auger F. Some Simple Parameter Determination Ruler for the Generalized Choi-Williams and Butterworth Distributions // *IEEE Signal processing letters*. 1994. Vol. 1. № 1. PP. 9–11.
23. Goncalves P., Baraniuk R.G. A Pseudo-Bertrand Distribution for Time-Scale Analysis // *IEEE Signal Processing Letters*. 1996. Vol. 3. Iss. 3. PP. 82–84.

24. Дворников С.В. Проблема поиска сигналов источников информации при радиомониторинге // Мобильные системы. 2007. № 4. С. 33–35.
25. Boashash B., Ristic B. Time-varying polyspectra and reduced Wigner – Ville trispectrum // Proceedings of SPIE. Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures, and Implementations III. 1992. Vol. 1770.
26. Алексеев А.А., Железняк В.К., Комарович В.Ф., Дворников С.В. Автоматизированная система контроля интенсивности физических полей рассеивания сигналов // Научное приборостроение. 2000. Т. 10. № 3. С. 77–87.
27. Дворников С.В., Яхеев А.Ф. Метод измерения параметров кратковременных сигналов на основе распределения Алексеева // Информация и космос. 2011. № 1. С. 66–74.
28. Дворников С.В., Железняк В.К., Храмов Р.Н., Желнин С.Р., Медведев М.В., Симонов А.Н., Сауков А.М. Метод обнаружения радиоизлучений на основе частотно-временного распределения Алексеева // Научное приборостроение. 2006. Т. 16. № 1. С. 107–115.
29. Дворников С.В., Осадчий А.И., Дворников С.С., Родин Д.В. Демодуляция сигналов на основе обработки их модифицированных распределений // Контроль. Диагностика. 2010. № 10. С. 46–54.
30. Яхеев А.Ф., Дворников С.В. Измерение параметров сигналов на основе оптимизации формы распределения Алексеева // Научные технологии. 2009. Т. 10. № 1. С. 25–28.
31. Дворников С.В. Демодуляция сигналов на основе обработки их модифицированных частотно-временных распределений // Цифровая обработка сигналов. 2009. № 2. С. 7–11.
32. Дворников С.В., Сауков А.М. Модификация частотно-временных описаний нестационарных процессов на основе показательных и степенных функций // Научное приборостроение. 2004. Т. 14. № 3. С. 76–85.

* * *

BILINEAR TIME-FREQUENCY DISTRIBUTIONS WITH A LOWERED LEVEL OF THE INTERFERENCE BACKGROUND IN THE FREQUENCY-TEMPORARY SPACE (continued review)

S. Dvornikov¹

¹Telecommunications Military Academy,
St. Petersburg, 194064, Russian Federation

Article info

Article in Russian

For citation: Dvornikov S. Bilinear Time-Frequency Distributions with a Lowered Level of the Interference Background in the Frequency-Temporary Space: Continued Review // Proceedings of Telecommunication Universities. 2018. Vol. 4. Iss. 2. PP. 69-81.

Abstract: *An overview of the theoretical foundations of the synthesis of various types of pseudo-distributions of the Wigner class is presented. The possibilities of known approaches to reduce the negative consequences of processing multicomponent signals based on bilinear distributions are analyzed. Analytical expressions for time-frequency distributions with a low level of interference background are presented. The reasons for applying smoothing window functions in the frequency and time spaces are substantiated. Analytical expressions and experimental results of the most known forms of bilinear distributions with a reduced level of interference background are presented.*

Keywords: *frequency-time pseudo-distributions, methods for controlling the interference background, processing multicomponent signals, distribution of the Cohen class.*