

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ ОБЪЕКТА С ПОМОЩЬЮ ГРАНИЦЫ КРАМЕРА-РАО

А.В. Киреев^{1*}, И.В. Федоренко², Г.А. Фокин¹

¹Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича,
Санкт-Петербург, 193232, Российская Федерация

²Санкт-Петербургский политехнический университет им. Петра Великого,
Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация

*Адрес для переписки: kireyev@list.ru

Информация о статье

УДК 621.396

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Киреев А.В., Федоренко И.В., Фокин Г.А. Оценка точности позиционирования объекта с помощью границы Крамера-Рао // Труды учебных заведений связи. 2017. Том 3. № 2. С. 77–83.

Аннотация: *Выполнена оценка точности позиционирования источника радиоизлучения в зависимости от числа опорных пунктов. Координаты источника определены разностно-дальномерным методом. Основной задачей настоящей работы является оценка влияния числа опорных пунктов и их расположения путем сравнения с границей Крамера-Рао. Для решения системы уравнений реализованы методы нелинейных наименьших квадратов на основе математических алгоритмов Гаусса-Ньютона и Левенберга-Марквардта.*

Ключевые слова: *позиционирование, разностно-дальномерный метод, источник радиоизлучения, имитационное моделирование, метод наименьших квадратов.*

ACCURACY EVALUATION OF POSITIONING BY CRAMER RAO BOUND

A. Kireev¹, R. Fedorenko², G. Fokin¹

¹The Bonch-Bruevich Saint-Petersburg State University of Telecommunications,
St. Petersburg, 193232, Russian Federation

²Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, 195251, Russian Federation

Article info

Article in Russian

For citation: Kireev A., Fedorenko R., Fokin G. Accuracy Evaluation of Positioning by Cramer-Rao Bound // Proceedings of Educational Institutes of Communication. 2017. Vol. 3. Iss. 2. PP. 77–83.

Abstract: *Article is devoted to accuracy estimation of positioning objects by mathematic Cramer Rao bound and depending on amount of base stations. Defining of coordinates is solved by range-difference location method. Gauss-Newton and Levenberg-Marquardt mathematic least square methods were evaluated for solving equation system.*

Keywords: *positioning, range difference location, radio-frequency source, simulation modelling, least square method.*

Ситуации, при которых необходимо быстро и точно определить местонахождение человека, встречаются постоянно. Самым распространенным решением этой задачи является использование системы глобального позиционирования Global Positioning service (GPS) или ГЛОНАСС. Однако, главный недостаток этой технологии заключается, в том, что точность определения местоположения снижается при плохих погодных условиях. Поэтому целесообразно рассмотреть возможности использования метода измерения разности времени приема сигналов.

Технология измерения разности времени приема сигнала используется в мобильных сетях четвертого поколения LTE для определения местоположения как базовых, так и абонентских станций. Так как покрытие территории с использованием этого стандарта связи ежегодно растет, данное исследование актуально.

Цель проводимого авторами исследования заключается в оценке точности позиционирования в зависимости от числа опорных точек и последующем сравнении с границей Крамера-Рао.

Принцип работы разностно-дальномерного метода

Примем, что абонентское устройство излучает сигнал в неизвестный момент времени t_0 , при этом для простоты синхронизированы между собой. Расстояние между опорным пунктом и ИРИ равно $d_1 \dots d_N$, где N – число опорных пунктов. Для определения местоположения ИРИ необходимо выбрать один из пунктов основным и рассчитать линии постоянной разности ($d_1 - d_2, d_1 - d_3, \dots d_1 - d_N$) всех возможных пар пунктов. Оценка линий постоянной разности осуществляется путем измерения разности времен прихода сигналов $\tau_{ij} = (\tau_i - t_0) - (\tau_j - t_0) = \tau_i - \tau_j$, где τ_i – время прихода сигнала на опорный пункт i , τ_j – время прихода сигнала на опорный пункт j , $i, j = 1, \dots, N$. Расчет относительно одного основного пункта обусловлен тем, что из $N(N - 1)/2$ возможных измерений τ_{ij} статистически независимыми оказываются лишь $(N - 1)$ разностей времен прихода. Точка пересечения гипербол, установленных линиями постоянной разности определяет местоположение абонентского устройства.

При моделировании введем аддитивный белый гауссовский шум (АБГШ) для анализа влияния плохого приема на точность позиционирования, таким образом линии постоянной разности r_{ij} :

$$r_{ij} = d_{i,1} + n_{ij}. \quad (1)$$

Представим выражение (1) в матричном виде. Для этого обозначим координаты опорных пунктов как вектор координат $X_i = [x_i, y_i]^T$, где $i = 1, \dots, N$; $X = [x, y]$ – вектор координат ИРИ. Тогда d_i определяется выражением:

$$d_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Тогда (1) можно представить следующим образом:

$$r = d_1(x) + n,$$

$$\text{где: } d_1(x) = \begin{bmatrix} \sqrt{(x-x_2)^2 - (y-y_2)^2} - \sqrt{(x-x_1)^2 - (y-y_1)^2} \\ \sqrt{(x-x_3)^2 - (y-y_3)^2} - \sqrt{(x-x_1)^2 - (y-y_1)^2} \\ \vdots \\ \sqrt{(x-x_N)^2 - (y-y_N)^2} - \sqrt{(x-x_1)^2 - (y-y_1)^2} \end{bmatrix}, n = [n_2, n_3, \dots, n_L].$$

Таким образом, для нахождения координат ИРИ необходимо решить систему нелинейных уравнений. Рассмотрим несколько алгоритмов решения системы нелинейных уравнений.

Алгоритмы решения системы уравнений РДМ

Алгоритм Гаусса-Ньютона – это итерационный численный метод, работающий по принципу минимизации целевой функции:

$$\varepsilon(x) = (r - d_1(x))^T (r - d_1(x)),$$

то есть для получения оценки \hat{x} координат ИРИ используется метод наименьших квадратов:

$$\hat{x} = \arg \min \varepsilon(x).$$

Получение оценки \hat{x} достигается итеративно за k итераций согласно выражению:

$$x^{k+1} = x^k + (J^T(x^k)J(x^k))^{-1} J^T(x^k),$$

где x^{k+1} – текущее, а x^k – предыдущее рассчитанное значение; $J(x^k)$ – Якобиан вектора $d_1(x^k)$, рассчитанный для x^k :

$$(x^k) = \begin{bmatrix} \frac{x-x_2}{d_2} - \frac{x-x_1}{d_1} & \frac{y-y_2}{d_2} - \frac{y-y_1}{d_1} \\ \frac{x-x_3}{d_3} - \frac{x-x_1}{d_1} & \frac{y-y_3}{d_3} - \frac{y-y_1}{d_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x-x_N}{d_N} - \frac{x-x_1}{d_1} & \frac{y-y_N}{d_N} - \frac{y-y_1}{d_1} \end{bmatrix}.$$

Алгоритм Гаусса-Ньютона позволяет получить быстрый результат без затрат вычислительной мощности за счет быстрой сходимости, однако это достигается за счет грубой начальной оценки x_0^k , которая для расчетов по нелинейным алгоритмам Гаусса-Ньютона и Левенберга-Марквардта определяется как среднее арифметическое координат опорных пунктов, участвующих в сеансе позиционирования, и определяется выражением:

$$x_0^k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Алгоритм Левенберга-Марквардта опирается на метод наискорейшего спуска и метод Гаусса-Ньютона, то есть может рассматриваться как комбинация последнего с параметром λ , где λ – корректирующий множитель (множитель Марквардта):

$$x^{k+1} = x^k + (J^T(x^k)J(x^k) + \lambda^k I_2)^{-1} J^T(x^k) (r - d_1(x^k)),$$

где I_n – единичная матрица размера n .

Линейный алгоритм работает за счет линеаризации уравнения (1) следующим образом:

$$AQ + q = b,$$

где:

$$A = 2 \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & -r_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & -r_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1 - x_N & y_1 - y_N & -r_N \end{bmatrix},$$

$$Q = [x - x_1 \ y - y_1 \ R_1]^T,$$

$$q = [m_2 \ m_3 \ m_M]^T,$$

$$b = \begin{bmatrix} r_2^2 - (x - x_2)^2 - (y - y_2)^2 \\ r_3^2 - (x - x_3)^2 - (y - y_3)^2 \\ \dots \\ r_N^2 - (x - x_N)^2 - (y - y_N)^2 \end{bmatrix},$$

$$m_i = n_i^2 + 2n_i \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2},$$

$$R_1 = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}.$$

Оценка координат x ИРИ определяется выражением:

$$x = [[Q]_1 + x_1[Q]_2 + y_1]^T.$$

Для сравнения результатов полученных от разных алгоритмов введем понятие границы (неравенства) Крамера-Рао. Граница Крамера-Рао устанавливает нижнюю границу дисперсии для оценки координат ИРИ:

$$CRLB(x) = \text{trace}(J^T C^{-1} J)^{-1},$$

где J – Якобиан вектора $d_1(x)$, рассчитанный для x ; C – ковариационная матрица погрешностей:

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{bmatrix},$$

где σ_l – дисперсия погрешности измерений наблюдаемой линии постоянной разности r_i .

Ход моделирования

Оценка точности позиционирования ИРИ была выполнена на основе имитационной модели. Для решения системы уравнения РДМ были реализованы алгоритмы Гаусса-Ньютона, Левенберга-Марквардта и линейный.

Для анализа результатов введем понятие среднеквадратической ошибки прогноза (СКО) координат ИРИ, которое определяется формулой:

$$RMSE = \sqrt{E \left\{ \sqrt{(x - \hat{x})^2 + (y - \hat{y})^2} \right\}}.$$

При моделировании опорные пункты располагаются равномерно вокруг ИРИ в радиусе от 4 до 5 километров. При увеличении числа опорных пунктов, имитационная модель автоматически равномерно располагает их по предложенной площади (рис. 1).

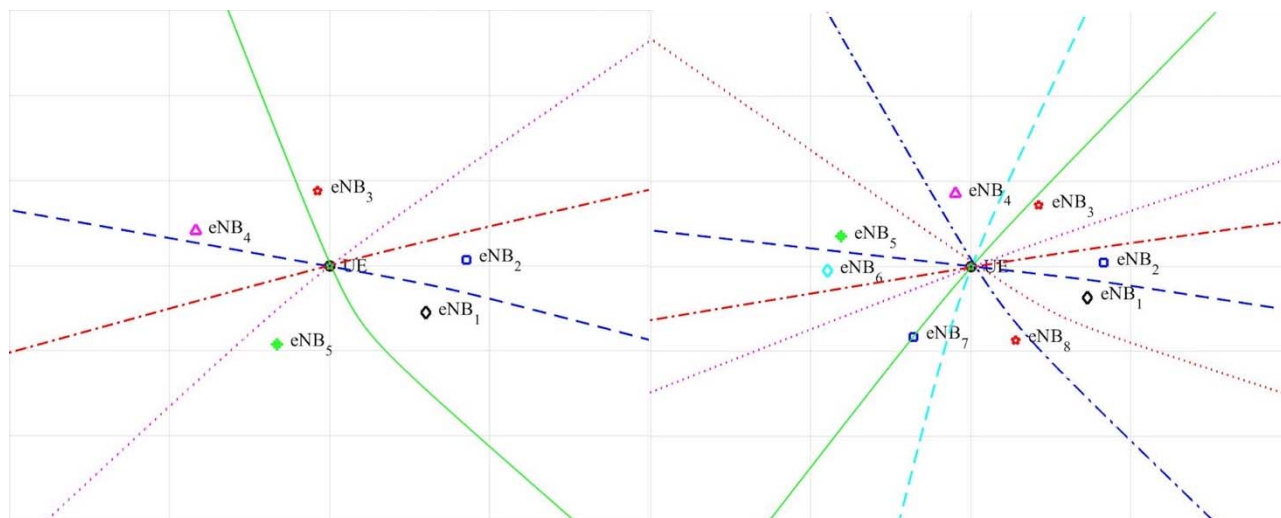


Рисунок 1. Расположение опорных пунктов при изменении их количества

Для соответствующей оценки моделировалось количество опорных пунктов от 3 до 8, влияние шума изменялось от 50 до 100 дБ. В процессе моделирования было установлено, что при заданных условиях алгоритмы Гаусса-Ньютона и Левенберга-Марквардта дают идентичные значения, поэтому целесообразно применять только один из них (см. табл.).

Таблица. Значения СКО для метода Гаусса-Ньютона и линейного алгоритма

Количество опорных пунктов	Метод Гаусса-Ньютона	Линейный алгоритм	Метод Гаусса-Ньютона	Линейный алгоритм
	ОСШ 50 дБ		ОСШ 80 дБ	
3	43,348	526,420	1,368	509,143
4	38,519	36,365	1,214	1,086
5	7,704	24,473	0,244	0,794
6	12,007	6,297	0,380	0,200
7	13,284	11,121	0,378	0,358
8	11,976	4,313	0,083	0,172

Анализ таблицы показывает, что линейный алгоритм неработоспособен при малом количестве опорных пунктов. При низком соотношении сигнал/шум линейный алгоритм дает лучшие результаты, чем методы наименьших квадратов, при хорошем приеме алгоритмы дают идентичные результаты. Увеличение соотношения сигнал/шум дает существенное увеличение точности позиционирования.

Анализ графика на рис. 2 показывает, что линейный алгоритм менее точен, чем метод Гаусса-Ньютона. Увеличение количества опорных пунктов улучшает точность позиционирования ИРИ. Оценка точности позиционирования границей Крамера-Рао показала, что полученные оценки адекватны и соответствуют теории.

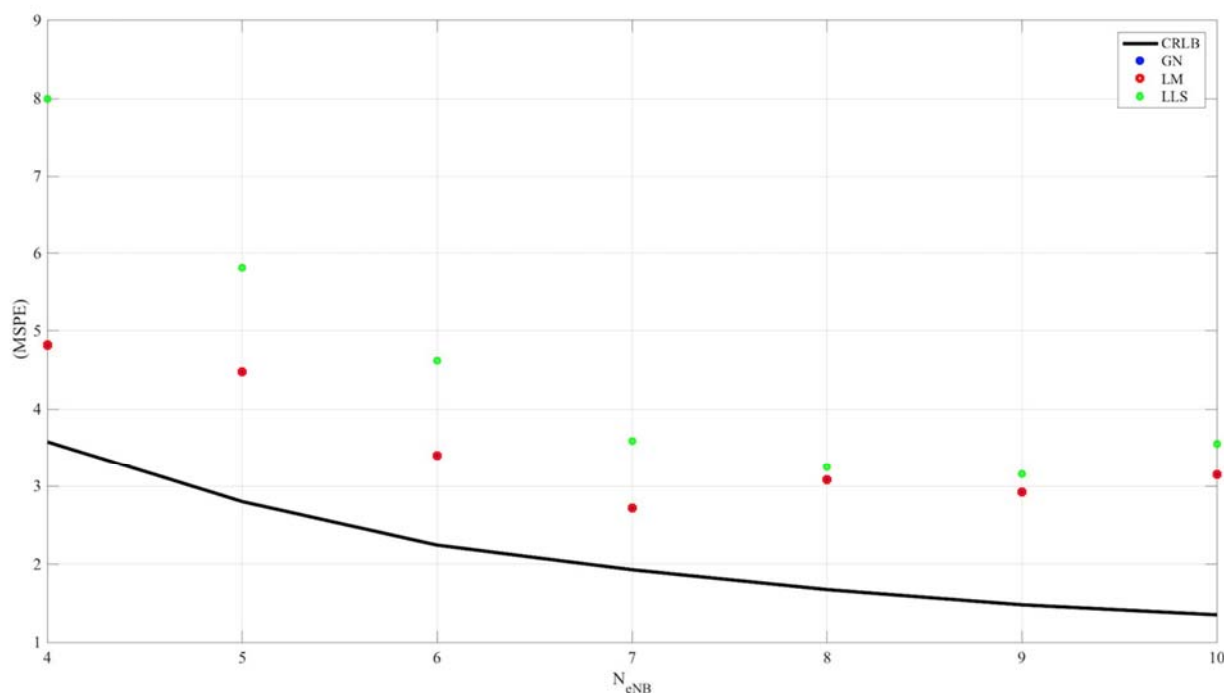


Рисунок 2. Зависимость СКО от числа опорных пунктов при ОСШ 60 дБ

По итогам исследования выполнена оценка точности позиционирования ИРИ разностно-дальномерным методом при увеличении числа опорных пунктов. Для решения системы нелинейных уравнений были реализованы алгоритмы Гаусса-Ньютона, Левенберга-Марквардта и линейный алгоритм. По результатам моделирования использование линейного алгоритма целесообразно при низких соотношениях сигнал/шум.

Увеличение числа опорных пунктов улучшает точность позиционирования, но качество приема сигнала влияет на точность более существенно.

В дальнейшем, планируется экспериментальное исследование метода измерения разности времени приема сигнала с помощью программно-конфигурируемого радио для позиционирования как внутри помещений, так и на больших расстояниях.

Список используемых источников

1. Киреев А.В., Фокин Г.А. Позиционирование источников радиоизлучения в сетях LTE с использованием круговой антенной решетки // Наука и инновации в технических университетах: Материалы Девятого Всероссийского форума студентов, аспирантов и молодых ученых. Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого. 2015. С. 25–26.
2. Sivers M., Fokin G. LTE Positioning Accuracy Performance Evaluation // Conference on Smart Spaces. Springer International Publishing. 2015. PP. 393–406.
3. Reza Zekavat R. Michael Buehrer // Handbook of Position Location: Theory, Practice and Advances. Wiley-IEEE Press. 2011. P. 1281.
4. Levenberg K.: A Method for the Solution of Certain Problems in Least-Squares // Quarterly Applied Math. 1944. Vol. 2. PP. 164–168.
5. Marquardt D. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters // SIAM Journal Applied Math. 1963. Vol. 11. PP. 431–441.
6. LTE System Toolbox™. URL: <http://www.mathworks.com/products/lte-system/>.
7. Miao H., Yu K., Juntti M.J. Positioning for NLOS Propagation: Algorithm Derivations and Cramer–Rao Bounds // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2007. Vol. 56. Iss. 5. PP. 2568–2580.
8. Borisov E., Fokin G., Mashkov G. Experimental Validation of Multipoint Joint Processing of Range Measurements via Software-Defined Radio Testbed // Advanced Communication Technology (ICACT), 18th International Conference on. IEEE. 2016. PP. 268–273.
9. Fokin G., Gelgor A., Pavlenko I. LTE Base Stations Localization // International Conference on Next Generation Wired / Wireless Networking. Springer International Publishing. 2014. PP. 191–204.
10. Sivers M., Fokin G., Dmitriev P., Kireev A. Indoor Positioning in WiFi and NanoLOC Networks // International Conference on Next Generation Wired / Wireless Networking. Springer International Publishing. 2016. PP. 465–476.