

БИЛИНЕЙНЫЕ МАСШТАБНО-ВРЕМЕННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ АФФИННОГО КЛАССА В ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ (продолжение обзора)

С.В. Дворников^{1*}

¹Военная академия связи имени Маршала Советского Союза С.М. Буденного,
Санкт-Петербург, 194064, Российская Федерация

*Адрес для переписки: practicsv@yandex.ru

Информация о статье

УДК 621.391

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Дворников С.В. Билинейные масштабнo-временные распределения энергии аффинного класса в частотно-временном пространстве: продолжение обзора // Труды учебных заведений связи. 2018. Т. 4. № 3. С. 26–44.

Аннотация: Представлен обзор теоретических основ синтеза масштабнo-временных распределений аффинного класса. Проанализирована методология вейвлет-преобразований с адаптивным окном анализа в интересах обработки процессов с высокой нестационарностью параметров. Обобщены аналитические подходы синтеза распределений инвариантных к аффинным сдвигам. Показана общность масштабнo-временных и частотно-временных распределений. Приведены аналитические выражения и результаты экспериментов наиболее известных форм распределений аффинного класса.

Ключевые слова: масштабнo-временные распределения, методы обработки процессов с высокой нестационарностью параметров, распределения аффинного класса, вейвлет-преобразования.

Введение

В предшествующих работах по данной тематике [1, 2] достаточно подробно были рассмотрены билинейные частотно-временные распределения (ЧВР), представляющие собой научно-методический аппарат методов гармонического анализа. Основопологающим моментом для ЧВР является функция Вигнера, позволяющая формировать их на своей основе, тем самым объединяя в единый класс распределений Коэна [2–5].

Однако развитие билинейных распределений не ограничивается указанным классом ЧВР, поскольку аффинные финитные функции позволили открыть новую страницу данной научной теории [6]. В связи с этим, в настоящей статье представлен обзор так называемых масштабнo-временных распределений, основанных на кратно масштабных преобразованиях сигнальной энергии, которые в [7] определены как распределения аффинного класса. В общем случае, масштабнo-временные распределения базируются на вейвлет-преобразованиях сигналов. Развитие данного научного направления определили работы таких известных ученых как Bertrand J., Bertrand P., Flandrin P., Baraniuk R., Goncalves P., Auger F и др. [7–12].

Проблемы, определившие переход к масштабнo-временным описаниям энергии

Высокая нестационарность изменения спектрально-временных параметров исследуемых процессов на интервале наблюдения приводит к тому, что оценки на основе ЧВР получаются как бы «размытыми», смазанными [13]. Одним из решений указанной проблемы явилась реализация концепции адаптации длительности окна анализа в зависимости от характера происходящих изменений исследуемого процесса [10]. В частности, в [14, 15] предложен критерий, определяющий сигналы с нестационарным изменением параметров. К таковым следует относить сигналы, у которых коэффициент перекрытия диапазона изменения контролируемых параметров составляет не менее двух на интервале их наблюдения.

Под действие указанного критерия попадают, например, неоднородности оцениваемого спектра переходных процессы при смене частотных позиций и т. д. Интуитивно ясно, что их число будет возрастать с приближением к верхней границе частотного диапазона. Поэтому и разрешающую способность инструмента анализа целесообразно

регулировать в зависимости от наблюдаемой частоты [16].

Действительно, чем выше ее значение в пределах диапазона, тем более широкополосные сигналы могут в нем использоваться, а, следовательно, необходимо увеличивать полосу канальных фильтров с целью недопущения сглаживания высокочастотных составляющих исследуемых процессов.

Приведенные рассуждения позволяют сделать вывод, что анализ быстрых изменений наблюдаемого процесса целесообразно проводить, используя относительно узкое временное окно наблюдения. В тоже время анализ относительно медленных изменений удобнее проводить в пределах широкого временного интервала [14].

Таким образом, необходимо иметь «гибкое» частотно-временное окно, которое автоматически сжимается при высокочастотном изменении параметров сигналов (исследуемых процессор) и расширяется при относительно стационарном их поведении. Указанным требованиям в полной мере удовлетворяет интегральное вейвлет-преобразование (ИВП) [17, 18], методология которого и была положена в основу методов кратномасштабного анализа, у истоков которого стояли Bertrand P. и Flandrin P. [7–10, 12, 19]. Именно они обосновали возможность формирования на основе вейвлет-преобразований сигналов их псевдобилинейных форм масштабно-временных распределений, подробный анализ свойств которых представлен в [6, 14]. В том числе получены удобные компактные формы представления кратковременных фрагментов сигналов для реализации их в алгоритмах обработки [20–26].

Непосредственно сущность аффинной инвариантности, определяющая физическую природу масштабно-временных описаний плотности распределения энергии, была подробно изложена в [10, 17, 27]. Это позволило установить общность аффинных распределений с ЧВР класса Козна [3, 11, 14, 29, 30], а также их практическую применимость [25, 26].

Теоретические основы формирования масштабно-временных распределений на основе вейвлет-преобразований

Рассмотрим ИВП с позиций фильтрации сигналов частотно-зависимым окном, которое определим следующим образом: функция $h \in L^2(\mathbf{R})$, тождественно не равная нулю, называется функцией-окном, если произведение $x \cdot h(x)$ также принадлежит $L^2(\mathbf{R})$, а центр t^* и радиус Δ_h функции-окна h определяются как:

$$t^* = \frac{1}{\|h\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} x |h(x)|^2 dx \quad (1)$$

и

$$\Delta_h = \frac{1}{\|h\|_2^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (x - t^*)^2 |h(x)|^2 dx \right\}^{1/2}. \quad (2)$$

Согласно введенному определению, ширина функции-окна составит $2\Delta_h$.

Заметим, что выбор вейвлет-функции в качестве функции-окна требует корректного определения базисному вейвлету ψ его образа преобразования Фурье $\hat{\psi}$, а также, соответственно, значений их центров и радиусов: $t^*, \omega^*, \Delta_\psi, \Delta_{\hat{\psi}}$.

Такой подход позволяет четко определить границы временного окна, локализуемые ИВП W_ψ при обработке, в общем случае, аналогового сигнала $z(t)$:

$$(W_\psi z)(b, a) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} z(t) \overline{\psi_n\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad (3)$$

$$[b + at^* - a\Delta_\psi, b + at^* + a\Delta_\psi]. \quad (4)$$

Центр локализации $b + at^*$ и его значимую ширину $2a\Delta_\psi$ называют параметрами временной локализации сигнала (функции) во «временном окне» [14]. Так, на рисунке 1 представлен частотно-временной план разбиения пространства $L^2(\mathbf{Z})$, образованного базисом вейвлетов Гаусса 5-го порядка.

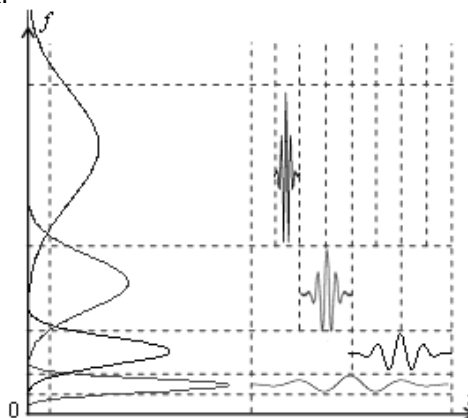


Рис. 1. Фрагмент частотно-временного разбиения пространства в базисе вейвлета Гаусса 5-го порядка

Если положить, что:

$$\hat{v}(\omega) = \hat{\psi}(\omega + \omega^*), \quad (5)$$

то функцию v также можно рассматривать в качестве функции-окна с центром в нуле и радиусом, равным $\Delta_{\hat{\psi}}$. Тогда ИВП (3) примет вид:

$$(W_\psi z)(b, a) = \frac{a}{2\pi\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{z}(\omega) e^{jb\omega} \hat{v}\left(a\left(\omega - \frac{\omega^*}{a}\right)\right) d\omega. \quad (6)$$

Анализ выражения (6) показывает, что его результат $(W_\psi z)(b, a)$ с точностью до множителя $a/2\pi\sqrt{|a|}$ и линейного сдвига по фазе $e^{jb\omega}$, определенного значением параметра b , совпадает с

величиной (3) и дает локализованную информацию о спектре $\hat{z}(\omega)$ сигнала $z(t)$ с «частотным окном»:

$$\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{\Delta\hat{\psi}}{a}, \quad \frac{\omega^*}{a} + \frac{\Delta\hat{\psi}}{a} \right]. \quad (7)$$

Центр локализации ω^*/a и его значимую ширину $2\Delta\hat{\psi}/a$ называют параметрами частотной локализации сигнала (в общем случае функции) в «частотном окне».

Учитывая факт, что выражения (3) и (6) определяют одну и ту же функцию $(W_\psi z)(b, a)$, можно перейти к понятию «частотно-временного окна»:

$$[b + at^* - a\Delta\psi, \quad b + at^* + a\Delta\psi] \times \left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{\Delta\hat{\psi}}{a}, \quad \frac{\omega^*}{a} + \frac{\Delta\hat{\psi}}{a} \right], \quad (8)$$

для совместного частотно-временного анализа на основе ИВП. Поскольку с математической точки зрения функция $u(x)$ определена как для положительных, так и отрицательных значений x , то в приложении к практической обработке сигналов базисный (или материнский) вейвлет ψ следует выбирать таким образом, чтобы центр ω^* функции $\hat{\psi}$ был положительным числом, а, с учетом параметра a , значение ω^*/a являлось частотным центром $\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{\Delta\hat{\psi}}{a}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{\Delta\hat{\psi}}{a} \right]$ анализируемого диапазона частот.

Тогда отношение частотного центра к ширине диапазона частот равняется:

$$\frac{\omega^*/a}{2\Delta\hat{\psi}/a} = \frac{\omega^*}{2\Delta\hat{\psi}} = Q. \quad (9)$$

Величина (9) называется Q – постоянной частотного анализа [27, 32].

Необходимо отметить важное свойство частотно-временного окна (8). Оно сужается вдоль оси времени при больших значениях частотных центров ω^*/a и расширяется при их малых значениях, в то время как общая площадь частотно-временного окна остается постоянной и равной $4\Delta\psi\Delta\hat{\psi}$ [27] (см. рисунок 2).

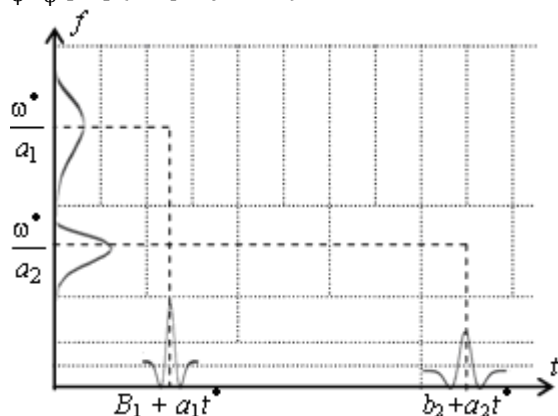


Рис. 2. Фрагменты частотно-временных окон интегрального вейвлет-преобразования

Для доказательства условий, характеризующих частотно-временное разрешение частотно-временного плана ИВП, рассмотрим следующие леммы.

Лемма 1.

Если существует производная u' и $u' \in L^1(\mathbf{R})$, то $\hat{u}'(\omega) = j\omega\hat{u}(\omega)$.

Доказательство.

Для доказательства леммы 1 в ИВП преобразуем правую часть выражения, воспользовавшись формулой интегрирования по частям $\int \vartheta dv = \vartheta v - \int v d\vartheta$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-j\omega x} dx &= \\ &= \left| \begin{array}{ll} f(x) = \vartheta & d\vartheta = u'(x) dx \\ e^{-j\omega x} dx = dv & v = -(e^{-j\omega x})/(j\omega) \end{array} \right| = \\ &= -\frac{e^{-j\omega x}}{j\omega} u(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} u'(x) dx = \\ &= \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} u'(x) dx. \end{aligned}$$

При преобразовании учитывалось, что:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} dx = -\frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} d(-j\omega x) = -\frac{e^{-j\omega x}}{j\omega}$$

и $u(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Тогда с учетом преобразования Фурье для $\hat{u}'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} u'(x) dx$ окончательно получим $\hat{u}'(\omega) = j\omega\hat{u}(\omega)$.

Лемма 2.

Если функции $u \in L^1(\mathbf{R})$ и $h \in L^1(\mathbf{R})$, то всегда существует функция $g \in L^1(\mathbf{R})$, такая что $g = \langle h, u \rangle$, причем $\hat{g} = \langle \hat{h}, \hat{u} \rangle$.

Доказательство.

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(x-v) h(v) dv \right) dx.$$

Так как произведение $|u(x-v)||h(v)|$ интегрируемо в пространстве $\mathbf{R}^2$, то возможно применение теоремы Фубини [27]. Тогда замена переменных $(x, v) \rightarrow (v = x - v, v)$ дает:

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-j(v+u)\omega] u(v) h(v) dv dv = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-jv\omega) u(v) dv \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-jv\omega) h(v) dv \right), \end{aligned}$$

что подтверждает правомерность результата $\hat{g} = \langle \hat{h}, \hat{u} \rangle$ [35].

Лемму 2 характеризует условие выполнения свертки в частотной и временной области.

Лемма 3.

Если существуют функции u и h , принадлежащие $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, то при их формальном равенстве $u = h$ следует, что:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\omega)|^2 d\omega.$$

Доказательство.

Пусть $g(x) = h^*(-x)$. Тогда, в соответствии с леммой 2 о свертке $\hat{g}(\omega) = \hat{u}(\omega)\hat{h}^*(\omega)$, формула восстановления $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega) e^{j\omega x} d\omega$ для функции при ее значении $u(0)$ дает значение:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u(x)h^*(x) dx &= g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega)d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega)\hat{h}^*(\omega)d\omega. \end{aligned}$$

Тогда при выполнении равенства $u = h$ имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\omega)|^2 d\omega. \quad (10)$$

Заметим, что формула (10) согласуется с равенством Планшереля [35].

Рассмотренные леммы дают основание для построения функции с компактной локализацией энергии как во временной области, для u , так и в частотной – для ее преобразования Фурье $\hat{u}$. Регулировать частотно-временные размеры функции, т. е. масштабировать ее возможно при помощи параметра a . Если учесть, что $a < 1$, то тогда для функции $u_a(t) = a^{-1/2}u(t/a)$ ее преобразование Фурье $\hat{u}_a(\omega) = \sqrt{a}\hat{u}(a\omega)$ расширяется в $1/a$ раз, т. е., теряя в частотной локализации, получаем аналогичный выигрыш во временной. Сам частотно-временной разброс концентрации энергии ограничен принципом неопределенности Гейзенберга [36], когда плотность вероятности локализации в момент t будет определяться как $\frac{1}{\|u\|^2}|u(t)|^2$, а для частотной области в момент ω , соответственно – $\frac{1}{2\pi\|u\|^2}|\hat{u}(\omega)|^2$.

Тогда среднее положение по времени может быть найдено как:

$$\nu = \frac{1}{\|u\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |u(t)|^2 dt, \quad (11)$$

а по частоте:

$$\xi = \frac{1}{2\pi\|u\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{u}(\omega)|^2 d\omega. \quad (12)$$

Очевидно, что дисперсии разброса во времени и по частоте будут равны:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{\|u\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - \nu)^2 |u(t)|^2 dt, \quad (13)$$

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi\|u\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \xi)^2 |\hat{u}(\omega)|^2 d\omega. \quad (14)$$

Для вейвлет-функции эти значения определяются как $\sigma_t^2 = \Delta_\Psi$, $\sigma_\omega^2 = \Delta_{\hat{\Psi}}$.

Теорема 1.

Временная дисперсия σ_t^2 и частотная дисперсия σ_ω^2 функции $u \in L^2(\mathbf{R})$ удовлетворяет неравенству $\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq 1/4$. Неравенство переходит в равенство тогда и только тогда, когда существуют $(\nu, \xi, a, b) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{C}^2$ такие, что:

$$u(t) = a \exp[j\xi t - b(t - \nu)^2].$$

Доказательство.

Предположим, что $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \sqrt{t}u(t) = 0$. Тогда, если $\|u\| = 1$, а средняя временная и частотная локализации u соответственно равняются ν и ξ , то среднее временное и частотное положение $\exp(-j\xi t) u(t + \nu)$ будет равно нулю. Следовательно, достаточно доказать выполнение условия, что $\nu = \xi = 0$.

При этом следует отметить, что:

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi\|u\|^4} \int_{-\infty}^{\infty} |tu(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |\omega \hat{u}(\omega)|^2 d\omega.$$

Так как $j\omega \hat{u}(\omega)$ есть преобразование Фурье от $u'(t)$ (согласно лемме 3), то равенство (10), примененное к $j\omega \hat{u}(\omega)$ (ко второму сомножителю правой части равенства), дает:

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = \frac{1}{\|u\|^4} \int_{-\infty}^{\infty} |tu(t)|^2 dt.$$

Применим к полученному выражению неравенство Шварца [35]:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 \sigma_\omega^2 &\geq \frac{1}{\|u\|^4} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |tu'(t)|^2 |u^*(t)| dt \right]^2, \\ \sigma_t^2 \sigma_\omega^2 &\geq \frac{1}{\|u\|^4} \left[\int_{-\infty}^{\infty} t/2 [u'(t)u^*(t) + u'^*(t)u(t)] dt \right]^2, \\ \sigma_t^2 \sigma_\omega^2 &\geq \frac{1}{4\|u\|^4} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt \right]^2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Для получения равенства:

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq 1/4 \quad (15)$$

неравенство Шварца, примененное к:

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{\|u\|^4} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |tu'(t)|^2 |u^*(t)| dt \right]^2,$$

должно перейти в равенство. Это означает, что существует $b \in \mathbb{C}$ такое, что:

$$u'(t) = -2btu(t). \quad (16)$$

Следовательно, существует $a \in \mathbb{C}$ такое, что $u(t) = a \exp(-bt^2)$.

Если $v \neq 0$ и $\xi \neq 0$, то соответствующие сдвиги по времени и по частоте приводят к:

$$u(t) = a \exp[j\xi t - b(t - v)^2]. \quad (17)$$

По своей сути ИВП является процедурой аффинного представления исследуемого процесса в кратномасштабном базисе вейвлет-функций, поскольку каждое окно формируется в результате линейного изменения параметров a и b .

Физический смысл рассмотренных операций заключается в последовательной корреляции исследуемого процесса $z(t)$ с аффинными копиями базисного вейвлета ψ .

Таким образом, результат (3) и (6) $(W_\psi z)(b, a)$ определяет расположение (в терминах $b + at^*$), «размер» (в терминах параметра a) и область изменения $z(t)$ с учетом способностей сжатия (растяжения) и сдвига. Следовательно, в своей совокупности информация, содержащаяся в ИВП $(W_\psi z)(b, a)$, полностью характеризует исследуемый процесс, а значит, на ее основе можно восстановить (репродуцировать) исходное значение $z(t)$.

Однако невозможность обратного репродуцирования говорит о неоднозначности разложения. Примером неоднозначного представления является корреляция и процедура одномерного преобразования Фурье [27].

В общем случае вейвлет-базис $\{\psi_{i,k}\}$ является двойственным базисом разложения, т. е. он позволяет осуществлять обратную репродукцию [37]. Однако, строго придерживаясь математических позиций, возможны четыре ситуации восстановления, определяющие ограничения на область определения на $(W_\psi u)$.

Первое условие: восстановление по $(W_\psi u)(b, a)$, $b, a \in \mathbb{R}$.

Одним из условий данного восстановления является наличие константы:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (18)$$

Конечность константы (18) сужает класс функций ψ из $L^2(\mathbb{R})$, которые могут использоваться в качестве базисных в ИВП.

Так, если ψ – функция-окно, то она принадлежит пространству $L^1(\mathbb{R})$, т. е.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)| dx < \infty, \quad (19)$$

но в этом случае $\hat{\psi}$ должна быть непрерывной функцией. Докажем это утверждение.

Теорема 2.

Пусть $u \in L^1(\mathbb{R})$. Тогда ее преобразование Фурье $\hat{u}$ обладает следующими свойствами:

- (а) $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R})$, где $\|\hat{u}\|_\infty \leq \|u\|_1$;
- (б) $\hat{u}$ равномерна и непрерывна на $\mathbb{R}$;
- (в) $u'(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \pm\infty$.

Доказательство.

В условии (а) рассматривается норма значения $\hat{u}$. Учитывая что $L^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$, то любое значение в $L^1(\mathbb{R})$ никогда не превысит его величины в $L^\infty(\mathbb{R})$. Следовательно, при соответствующем нормировании на указанные величины всегда будет выполняться неравенство $\|\hat{u}\|_\infty \leq \|u\|_1$.

Для доказательства (б) возьмем произвольное δ , и рассмотрим:

$$\begin{aligned} & \sup_{\omega} |\hat{u}(\omega + \delta) - \hat{u}(\omega)| = \\ &= \sup_{\omega} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} (e^{-j\delta x} - 1) u(x) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\exp(-j\delta x) - 1| \times |u(x)| dx. \end{aligned}$$

Так как:

$|\exp(-j\delta x) - 1| \times |u(x)| \leq 2|u(x)| \in \exp(-j\delta x) - 1 \rightarrow 0$, при $\delta \rightarrow 0$, то по теореме Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла имеем, что величина, стоящая справа, стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

Утверждение (в) называют леммой Римана–Лебега. При ее доказательстве заметим, что если u' существует и принадлежит $L^1(\mathbb{R})$, то из леммы 2 и утверждения (а) имеем при $\omega \rightarrow \pm\infty$:

$$|\hat{u}(\omega)| = \frac{1}{(\omega)} |\hat{u}'(\omega)| \leq \frac{1}{(\omega)} \|u'\|_1 \rightarrow 0.$$

В общем случае для любого $\varepsilon > 0$ можно найти функцию g такую, что $g, g' \in L^1(\mathbb{R})$ и $\|u - g\|_1 < \varepsilon$. Тогда из утверждения (а) имеем:

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\omega)| &\leq |\hat{u}(\omega) - \hat{g}(\omega)| + |\hat{g}(\omega)| \leq \\ &\leq \|u - g\|_1 + |\hat{g}(\omega)| < \varepsilon + |\hat{g}(\omega)|. \end{aligned}$$

Заметим, хотя $\hat{u}(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \pm\infty$ выполняется для любой $u \in L^1(\mathbb{R})$, это не означает, что и $\hat{u}$ обязательно принадлежит $L^1(\mathbb{R})$. Примером является функция Хевисайда:

$$u_H(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \geq a \\ 0 & \text{для } x < a \end{cases} \quad (20)$$

В $u(x) = e^{-x} u_H(x)$, которая принадлежит $L^1(\mathbb{R})$, в то время как ее преобразование Фурье $\hat{u}(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$ пространству $L^1(\mathbb{R})$ не принадлежит.

Из (18) следует, что функция $\hat{u}$ обращается в нуль в начале координат, другими словами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) dx = 0. \quad (21)$$

Следовательно, базисный вейвлет должен представлять гладкую функцию с высокой временной локализацией, тогда формула реконструкции исходного процесса из ИВП будет иметь вид [14]:

$$u(x) = \frac{1}{C_\Psi} \int_{\mathbb{R}^2} \int \left[\{(W_\Psi u)(b, a)\} \times \left\{ |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\} \right] \frac{dadb}{a^2}, \quad (22)$$

$$u \in L^2(\mathbb{R}).$$

Здесь $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Следует заметить, что в выражении (22) ядро $|a|^{-1/2} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$ с точностью до знака комплексного сопряжения используется в ИВП (3) и (6), что говорит о двойственности базисного вейвлета Ψ .

Второе условие: восстановление процесса (сигнала) по его ИВП $(W_\Psi u)(b, a)$, $b \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

В практических реализациях, когда в качестве анализируемой функции выступает реальный сигнал, область интегрирования при реставрации ограничивается до $\mathbb{R} \times (0, \infty)$. В этом случае для базисных вейвлетов достаточно соответствия условию:

$$\int_0^\infty \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_0^\infty \frac{|\hat{\Psi}(-\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \frac{C_\Psi}{2} < \infty. \quad (23)$$

Тогда для любой Ψ , удовлетворяющей (23), формула реконструкции имеет вид:

$$u(x) = \frac{2}{C_\Psi} \int_0^\infty \left[\int \{(W_\Psi u)(b, a)\} \times \left\{ |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\} db \right] \frac{da}{a^2}, \quad (24)$$

$$u \in L^2(\mathbb{R}).$$

Близость выражений (24) и (22) позволяет предположить, что и в этом случае отсутствует свойство единственности двойственного. Однако здесь в большей степени интересным видится выполнение самого условия реконструкции. Докажем правомерность данного утверждения.

Теорема 3.

Пусть $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$ – вещественная функция, такая что:

$$C_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty.$$

Тогда любая функция $u \in L^2(\mathbb{R})$ удовлетворяет равенствам:

$$u(x) = \frac{1}{C_\Psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (W_\Psi u)(b, a) \left\{ |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\} \frac{dadb}{a^2}$$

и

$$\int_{-\infty}^\infty |u(x)|^2 dx = \frac{1}{C_\Psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [(W_\Psi u)(b, a)]^2 \frac{dadb}{a^2}.$$

Доказательство.

Представим через $u(x)$ – интеграл справа выражения:

$$u(x) = \frac{1}{C_\Psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (W_\Psi u)(b, a) \left\{ |a|^{-1/2} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\} \frac{dadb}{a^2}$$

как интеграл от сверток. Тогда подстановка $(W_\Psi u)(b, a) = \langle u, \Psi_a^*(b) \rangle$, где $\Psi_a(b) = a^{-1/2} \Psi(x/a)$, дает:

$$(x) = \frac{1}{C_\Psi} \int_0^\infty \langle (W_\Psi u)(b, a), \Psi_a(x) \rangle \frac{da}{a^2} =$$

$$= \frac{1}{C_\Psi} \int_0^\infty \langle u, \Psi_a^*(b) \rangle \langle \Psi_a(x) \rangle \frac{da}{a^2}.$$

В то же время преобразование Фурье от $u(x)$ есть:

$$\hat{u}(\omega) = \frac{1}{C_\Psi} \int_0^\infty \hat{u}(\omega) \sqrt{a} \hat{\Psi}^*(a\omega) \sqrt{a} \hat{\Psi}^*(a\omega) \frac{da}{a^2} =$$

$$= \frac{\hat{u}(\omega)}{C_\Psi} \int_0^\infty |\hat{\Psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{a}.$$

Так как Ψ – вещественная функция, то $|\hat{\Psi}(-\omega)|^2 = |\hat{\Psi}(\omega)|^2$.

Следовательно, сделав замену переменных $\xi = a\omega$, получаем, что:

$$\hat{u}(\omega) = \frac{\hat{u}(\omega)}{C_\Psi} \int_0^\infty \frac{|\hat{\Psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi = \hat{u}(\omega).$$

Таким образом, если равны преобразования Фурье функций, то, следовательно, равны и их временные образы.

Для доказательства справедливости условия:

$$\int_{-\infty}^\infty |u(x)|^2 dx = \frac{1}{C_\Psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [(W_\Psi u)(b, a)]^2 \frac{dadb}{a^2},$$

воспользуемся следующим фактом, что преобразование Фурье по b от $(W_\Psi u)(b, a)$ есть $\hat{u}(\omega + b) \hat{\Psi}(\omega)$. Тогда в соответствии с леммой 3 формула (10), примененная к правой части, дает:

$$\frac{1}{C_\Psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [(W_\Psi u)(b, a)]^2 \frac{dadb}{a^2} =$$

$$= \frac{1}{C_\Psi} \int_0^\infty \frac{1}{C_\Psi} \int_0^\infty |\hat{u}(\omega + b) \hat{\Psi}(\omega)|^2 d\omega db.$$

Из применения теоремы Фубини [35] следует:

$$\frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty |\hat{u}(\omega + b)|^2 db = \|u\|^2,$$

отсюда вытекает равенство:

$$\int_{-\infty}^\infty |u(x)|^2 dx = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [(W_\psi u)(b, a)]^2 \times \frac{dad b}{a^2}. \quad (25)$$

Третье условие: восстановление по $(W_\psi u)(b, a)$, $b \in \mathbf{R}$, $a = \frac{1}{2^i}$, $i \in \mathbf{Z}$.

Указанное восстановление рассматривает частотно-временную локализацию с частотными окнами:

$$H_i = [2^i \omega^* - 2^i \Delta_{\hat{\psi}}, \quad 2^i \omega^* + 2^i \Delta_{\hat{\psi}}], \quad (26)$$

при том, что i принимает значения целых чисел, т. е., $i \in \mathbf{Z}$.

Так как ИВП (3) используется для определения временных интервалов $[b + 2^{-i} t^* - 2^{-i} \Delta_\psi, b + 2^{-i} t^* + 2^{-i} \Delta_\psi]$, на которых спектральное содержание сигнала u с частотами из H_i лежит выше некоторого порога $|(W_\psi u)(b, a)|$. В рассматриваемых условиях доступна только часть информации об $W_\psi u$, следовательно, для реализации операции восстановления на базисный вейвлет должны налагаться более жесткие условия:

$$A \leq \sum_{i=-\infty}^\infty |\hat{\psi}(2^{-i} \omega)|^2 \leq B, \quad (27)$$

где A и B – константы, не зависящие от ω , причем $0 < A \leq B < \infty$.

Согласно (27), базисный вейвлет Ψ в этом случае удовлетворяет неравенствам:

$$A \ln 2 \leq \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega, \quad (28)$$

$$\int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega \leq B \ln 2,$$

обозначая, что C_ψ лежит между величинами $A \ln 2$ и $B \ln 2$.

Выполнение условия (27) для базисного вейвлета ψ , говорит о наличии у него двойственного центра ψ^* , преобразование Фурье которого задается формулой:

$$\hat{\psi}^*(\omega) = \frac{\overline{\hat{\psi}(\omega)}}{\sum_{i=-\infty}^\infty |\hat{\psi}(2^{-i} \omega)|}. \quad (29)$$

Теперь формула восстановления, использующая двойственное преобразование (29), определяется следующим образом:

$$u(x) = \sum_{i=-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left\{ 2^{\frac{i}{2}} (W_\psi u)(b, 2^{-i}) \right\} \times \{ 2^i \psi^*[2^i(x-b)] \} db, \quad (30)$$

$$u \in L^2(\mathbf{R}).$$

Базисные функции, удовлетворяющие условию (27), называются двухпараметрическими вейвлетами [32].

Четвертое условие: восстановление по $(W_\psi u)(b, a)$, $b = k2^{-i}$, $a = 2^{-i}$, $k, i \in \mathbf{Z}$.

Данное условие ориентированно на дискретные выборки, когда частотная ось разбивается на диапазоны, использующие степени 2 для масштабного параметра a .

Дальнейшее повышение эффективности вычислительных процедур связано с двухпараметрическими значениями $b = k2^{-i}$ на временной оси при $a = 2^{-i}$, $i \in \mathbf{Z}$ вместо произвольных $b \in \mathbf{R}$.

Для данного случая формула ИВП имеет удобный с точки зрения построения на ее основе вычислительных алгоритмов вид:

$$(W_\psi u)(k2^{-i}, 2^{-i}) = \int_{-\infty}^\infty u(x) \overline{\{ 2^{i/2} \psi(2^i x - b) \}} dx = \langle u, \psi_{i,k} \rangle, \quad (31)$$

где $\psi_{i,k}(x) = 2^{i/2} \psi(2^i x - b)$ при $k, i \in \mathbf{Z}$.

Выполнение указанных условий для ψ позволяет рассматривать базисные вейвлет-функции в качестве R -функций, представляющие базис Рисса в $L^2(\mathbf{R})$ [17], т. е. линейная оболочка $\psi_{i,k}$ при $k, i \in \mathbf{Z}$ достаточно плотна в $L^2(\mathbf{R})$ так, что существуют положительные константы A и B , $0 < A \leq B < \infty$, такие, что выполняется условие:

$$A \|\{c_{i,k}\}\|^2 \leq \left\| \sum_{i=-\infty}^\infty \sum_{k=-\infty}^\infty c_{i,k} \psi_{i,k} \right\|_2^2 \leq B \|\{c_{i,k}\}\|^2, \quad (32)$$

для всех бесконечных суммируемых с квадратом последовательностей $\{c_{i,k}\}$:

$$\|\{c_{i,k}\}\|^2 = \sum_{i=-\infty}^\infty \sum_{k=-\infty}^\infty |c_{i,k}|^2 < \infty. \quad (33)$$

Принадлежность ψ к классу R -функций обуславливает единственность базиса Рисса $\{\psi^{i,k}\}$, а следовательно, единственность разложения любой функции $u \in L^2(\mathbf{R})$ в вейвлет-ряд:

$$u(x) = \sum_{i,k=-\infty}^\infty \langle u, \psi_{i,k} \rangle \psi^{i,k}(x). \quad (34)$$

Для существования ряда (34) должна существовать некоторая функция $\tilde{\psi} \in L^2(\mathbf{R})$, определяющая двойственный базис как:

$$\psi^{i,k} = \tilde{\psi}_{i,k}(x), \quad (35)$$

где $\tilde{\psi}_{i,k}$ определяется $\tilde{\psi}_{i,k}(x) = 2^{i/2} \tilde{\psi}(2^i x - k)$.

Рассмотренный подход позволяет более строго определить вейвлет-функцию следующим образом [38]. Так, R -функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ называется R -вейвлетом (или вейвлетом), если существует функция $\tilde{\psi} \in L^2(\mathbf{R})$ такая, что $\{\psi_{i,k}\}$ и $\{\tilde{\psi}_{i,k}\}$ являются двойственными базисами в $L^2(\mathbf{R})$. Если ψ – R -вейвлет, то $\tilde{\psi}$ называют двойственным вейвлетом, соответствующим ψ .

Признаком «двойственности» вейвлета является его ортогональность. Однако самая важная особенность двойственного вейвлета состоит в симметричности пары $(\psi, \tilde{\psi})$, т. е. ψ является двойственным для $\tilde{\psi}$, и, как следствие, единственности разложения любой функции $u \in L^2(\mathbf{R})$ в вейвлет-ряд, где каждый коэффициент $c_{i,k}$ есть ИВП u относительно $\tilde{\psi}$ двойственного ψ , вычисленное в точках временной шкалы:

$$(b, a) = (k2^{-i}, 2^{-i}). \quad (36)$$

В соответствии с данным определением каждый вейвлет ψ в порожденном им базисе Рисса $\{\psi_{i,k}\}$ образует так называемое «замыкание» линейной оболочки $\{\psi_{i,k}: k \in \mathbf{Z}\}$ на каждом уровне декомпозиции W_i при $i \in \mathbf{Z}$:

$$W_i = \text{clos}_{L^2(\mathbf{R})}(\psi_{i,k}: k \in \mathbf{Z}). \quad (37)$$

Следовательно, пространство $L^2(\mathbf{R})$ может быть разложено в прямую сумму подпространств W_i :

$$L^2(\mathbf{R}) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} W_i, \quad (38)$$

причем для каждого из базисных вейвлетов разложение (23) будет единственным (в (38) берутся прямые суммы).

Очевидно, что при условии ортогональности ψ подпространства W_i также будут ортогональны, и сумма (38) становится ортогональной суммой:

$$L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} W_i = \dots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots, \quad (39)$$

а $W_l \perp W_m$, где $l, m \in \mathbf{Z}$, причем $l \neq m$.

В (39) окружность вокруг знака плюс $\bigoplus$ означает ортогональную сумму. Разложение (39) называют ортогональным разложением пространства $L^2(\mathbf{R})$ [35].

Вместе с тем разложение (39) не использует все ортогональные свойства $\{\psi_{i,k}\}$, а именно то, что для каждого i $\langle \psi_{i,k}, \psi_{i,l} \rangle = \delta_{k,l}$. Это означает, что существует широкий класс вейвлетов, которые могут использоваться для порождения ортогональных порождений $L^2(\mathbf{R})$. В частности, к такому следует отнести полуортогональные вейвлеты, позволяющие конструировать ортогональные базисы.

Вейвлет ψ в $L^2(\mathbf{R})$ называется полуортогональным вейвлетом [27], если порожденный им базис Рисса $\{\psi_{i,k}\}$ удовлетворяет равенству:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{i,k}, \psi_{l,m} \rangle &= 0, \\ i &\neq l; \\ i, k, l, m &\in \mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (40)$$

Особенностью полуортогональных вейвлетов является возможность порождения разложения $L^2(\mathbf{R})$ в виде прямой суммы ($+$ является знаком прямой суммы) замкнутых подпространств (39), так что для каждого $i \in \mathbf{Z}$ будут существовать замкнутые подпространства вида:

$$V_i = \dots + W_{i-2} + W_{i-1}. \quad (41)$$

Таким образом, обобщая полученные результаты, можно определить следующие важные свойства вейвлет-функций, адаптированные к решению задач синтеза масштабно-временных распределений.

Свойство 1. Локализация базисной функции во временном и спектральном пространстве:

$$\Delta FT = \text{const}. \quad (42)$$

Свойство 2. Наличие нулевого среднего:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0, \quad (43)$$

более жесткие требования – все первые m моментов были равны нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0 \quad (44)$$

(вейвлет-функция, удовлетворяющая условию (44), называется вейвлетом m -го порядка).

Свойство 3. Ограниченность энергии:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty. \quad (45)$$

Оценка локализации и ограниченности представляется следующим образом:

$$|\psi(t)| < \frac{1}{1 + |t|^m} \quad (46)$$

или

$$|\hat{\psi}(\omega)| < \frac{1}{1 + |k - \omega_0|^m}, \quad (47)$$

где ω_0 – доминантная частота вейвлета, при этом k – по возможности большое число.

Данное свойство гарантирует выполнение процедур обратного вейвлет-преобразования для ретрансляции сигнала конечной длительности.

Свойство 4. Сохранение самоподобия для всех вейвлетов, определяющих базис реконструкции. В частности, все вейвлеты одного базиса представ-

ляют масштабные копии друг друга, что допускает использование любого из них в качестве порождающего, т.е. материнского [38].

Формирование кратномасштабных пространств на основе интегрального вейвлет-преобразования

Для практических приложений процедур вейвлет-преобразований к обработке реальных сигналов целесообразно параметр масштабирования a рассматривать, исходя из следующей интерпретации. Поскольку исходный материнский вейвлет локализуется вокруг некоторой ненулевой частоты f_0 при значении параметра масштаба $a = 1$, то процесс масштабирования есть не что иное, как переход к новому значению частоты f_a , вокруг которой теперь уже будет локализоваться базисная вейвлет-функция.

Тогда процедуру ИВП (3) можно представить как совокупность сверток анализируемого сигнала с вейвлетами, базисная частота которых определяется выражением:

$$f_a = a f_0. \quad (48)$$

В результате формируемое ИВП имеет приемлемое частотно-временное разрешение как на крупных, так и на мелких масштабах частоты. В ряде работ [32] процедуру (3) применительно к обработке сигналов называют непрерывным вейвлет-преобразованием (НВП), а ее результат – вейвлет-коэффициентами.

Поскольку в общем случае параметры a и b меняются непрерывно, то множество базисных функций, осуществляющих декомпозицию сигнала, избыточно.

Очевидно, здесь необходимо дискретизацию параметров a и b осуществить таким образом, чтобы при снижении избыточности описания сохранялась общность свойств НВП.

В [40] предложен следующий подход к выбору параметров НВП:

$$a = a_0^i; \quad b = k b_0 a_0^i, \quad i, k \in \mathbb{Z}, \quad a_0 > 1, b_0 \neq 0. \quad (49)$$

Поскольку параметр b_0 в принципе произвольный, то целесообразно положить $b_0 = 1$. Взаимосвязь параметров (49) позволяет сделать вывод, что с увеличением масштаба увеличивается и размер шага сдвига вдоль временной оси.

Рациональность данного подхода объясняется тем, что при анализе с большим масштабом мелкие детали не так уж важны, в то время как при малых масштабах значение малоразмерных деталей значительно возрастает. Тогда в соответствии с четвертым условием восстановления исходный вид базисного вейвлета с дискретными значениями параметров a и b можно представить в следующем виде:

$$\psi_{j,k}(t) = a_0^{-\frac{j}{2}} \psi(a_0^{-j} t - k). \quad (50)$$

Формула (50) является обобщающей по отношению к (31). Следует отметить: условие того, что множество $\{\psi_{i,k}(t)\}_{i,k \in \mathbb{Z}}$ образует ортонормированную систему, т.е. любая функция $u \in L^2(\mathbb{R})$, характеризующая сигнал, может быть представлена рядом в соответствии с (50):

$$u = \sum_{i,k \in \mathbb{Z}} \langle u, \psi_{i,k} \rangle \psi_{i,k}. \quad (51)$$

Аналитическое описание (51) по своим атрибутам близко к разложению в ряд Фурье по экспоненциальным функциям $e_k = e^{jk}$. Однако экспоненциальная функция имеет глобальный носитель, следовательно, все члены разложения Фурье в каждой точке пространства параметра x зависят от значения самой функции u . В противоположность гармоническим функциям, вейвлет имеет компактный носитель, поэтому только члены разложения ряда (51), соответствующие $\psi_{i,k}$ с $i, 2^{-k}$ в окрестности точки x , вносят наибольший вклад в функцию в этой окрестности.

Другой важной особенностью вейвлет-разложения является то, что коэффициенты каждого уровня декомпозиции содержат всю информацию о степени гладкости сигнала.

Дискретизированное преобразование на основе вейвлета (50) в [40] определяют как ряды вейвлетов непрерывного времени по аналогии с терминологией преобразования Фурье.

Представление сигналов на их основе реализуется путем соответствующей дискретизации НВП (3) с учетом (50):

$$W_{i,k} = \int_{-\infty}^{\infty} a_0^{-i/2} \psi(a_0^{-i} t - k) z(t) dt. \quad (52)$$

Репродукция исходного сигнала $z(t)$ из коэффициентов его декомпозиции (52) возможна только в рамках следующих ограничений:

$$A \|z(t)\|^2 \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |W_{i,k}|^2 \leq B \|z(t)\|^2, \quad (53)$$

где $A > 0$, а $B < \infty$.

Выбор $A = B = 1$ и $a_0 = 2$ обеспечивает полную реконструкцию, поскольку тогда семейство вейвлетов $\psi_{a,b}(t)$ образует ортогональный базис [41]:

$$z(t) = \frac{1}{C_\psi} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} W_{i,k} a_0^{-i/2} \psi(a_0^{-i} t - k). \quad (54)$$

В общем случае восстановленный сигнал может и не совпадать с исходным, но будет близок к нему с точки зрения обеспечения минимума среднеквадратической ошибки аппроксимации. Рассмотренные условия декомпозиции и реконструкции

полностью вписываются в рамки четвертого условия восстановления ИВП.

Для дискретных параметров a и b , определяемых формулой (49), рациональным видится выбор $a_0 = 2$, а $b_0 = 1$, поскольку в этом случае алгоритмы расчета вейвлет-коэффициентов легко вписываются в концепцию цифровой обработки.

Сетка дискретизации, обеспечиваемая при $a_0 = 2$ и $b_0 = 1$, называется диадической, а формируемое на ее основе вейвлет-преобразование – диадным [42].

Так, на рисунке 3 представлен фрагмент многокомпонентного сигнала и его кратномасштабное представление на основе диадного вейвлет-преобразования (в [32] совместные масштабно-временные распределения на основе вейвлет-преобразований определены как масштабogramмы).

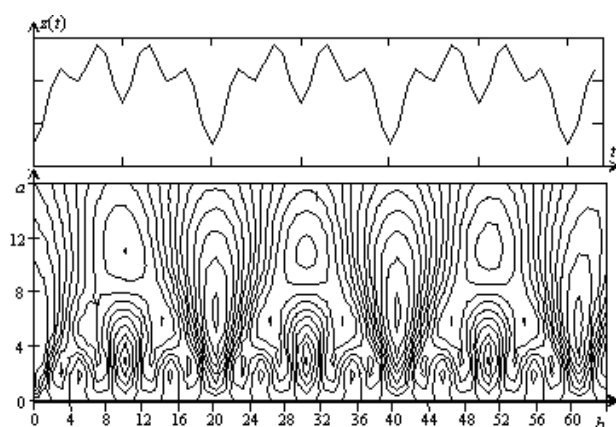


Рис. 3. Многокомпонентный сигнал и его масштабogramма на основе диадного вейвлет-преобразования

Адаптивный характер вейвлет-преобразования, позволяющий в равной степени подчеркнуть, как мелкие особенности анализируемого процесса, так и его крупные детали, позволяет предположить о наличии высоких помехоустойчивых свойств у масштабных представлений. На рисунке 4 представлены фрагменты: исходного тестового сигнала; зашумленного тестового сигнала; масштабogramма (модуль коэффициентов вейвлет-преобразования) зашумленного тестового сигнала.

Анализ результатов, представленных на рисунке 4, показывает, что основные искажения вейвлет-коэффициентов, вызванные воздействием шумов, сосредоточены в высокочастотной области масштабogramмы. Это объясняется низкой стационарностью шумовых компонент. А так как быстрые изменения в частотной области представляются широкополосными процессами, то они как раз и будут сосредотачиваться в части масштабogramмы, соответствующей области с высоким разрешением. Следовательно, если при обратной реконструкции не использовать вейвлет-коэффициенты, пораженные шумом, то восстановленный процесс будет свободен от шумов. Это

позволяет сделать вывод о помехоустойчивости совместных преобразований, построенных на основе вейвлетов.

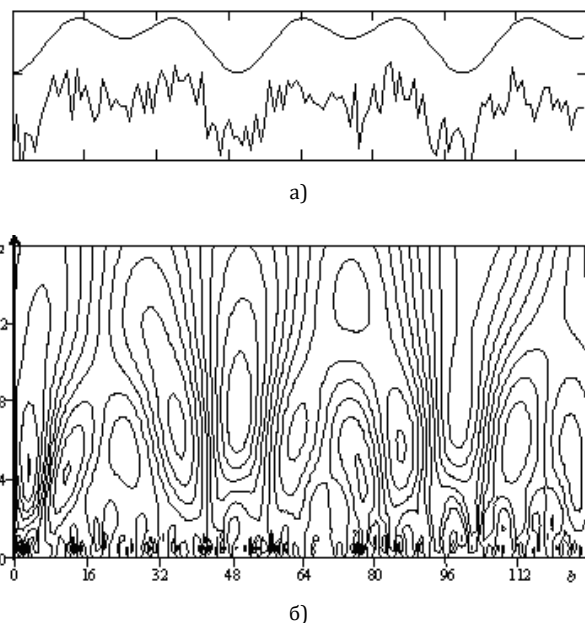


Рис. 4. Графическое представление: а) тестовый многокомпонентный сигнал без шумов и в аддитивных шумах; б) масштабogramма зашумленного тестового сигнала

Следует отметить, что рассмотренный выбор параметров для условия (49) не является единственным.

Так, масштабирование, кратное двум при условии непрерывности временного сдвига, ведет к синтезу вейвлет-фреймов [42].

Вейвлет-фреймы являются промежуточным преобразованием между интегральным и диадным представлением, поскольку непрерывность параметра сдвига ведет к избыточности описания при декомпозиции процессов.

Билинейные формы распределений аффинного класса

Анализ свойств различных форм совместных ЧВР класса Коэна выявил ряд проблем, возникающих при их непосредственном использовании в практических задачах обработки нестационарных процессов [23].

Поиск возможных путей их решений позволил выйти на так называемые гибридные распределения [14]. Данное направление, базирующееся на методологии масштабно-временного анализа, является наиболее продуктивным, поскольку гибридные распределения объединяют в себе помехоустойчивость вейвлет-преобразований и метрологические характеристики ЧВР класса Вигнера.

Успешное решение частных задач на основе гибридных распределений в [14] определяет прагматизм их практического применения.

В свое время Л. Козн установил, что все совместные ЧВР обладают характерным свойством инвариантности частотно-временному сдвигу (см. формулу 40 в [2]). Однако, рассмотрение с этих позиций реализации процесса вейвлет-преобразования позволяет сделать вывод, что в процедурах формирования вейвлет-коэффициентов данное свойство будет трансформировано [14].

Действительно, в классе Козна переход в частную область осуществлялся посредством процедур преобразований Фурье, реализуемых системой однотипных полосовых фильтров, сдвинутых относительно друг друга (рисунок 5а).

При формировании вейвлет-спектра имеем дело с системой фильтров, полосы пропускания которых являются масштабными версиями друг друга (рисунок 5б).

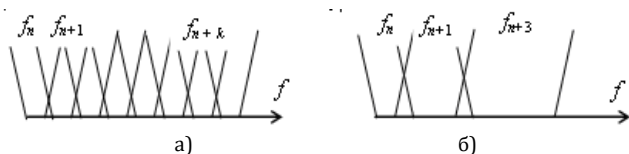


Рис. 5. Система фильтров, обеспечивающая формирование: а) распределений класса Козна; б) вейвлет-преобразований

Очевидно, что частотная инвариантность распределений, синтезированных на основе системы (рисунок 5б), будет определяться законом изменения полосы пропускания образующих ее фильтров.

Учитывая указанные обстоятельства для фильтрации, определяемой положениями кратномасштабного анализа (рисунок 5б), получаемая инвариантность получила название аффинной [10].

Согласно аффинной инвариантности любые масштабные изменения частоты и временные сдвиги, происходящие в сигнале $z(t)$, вызывают аналогичные масштабнo-временные изменения в формируемом распределении $\rho(f, t)$:

$$\begin{array}{ccc} z(t) & \rightarrow & \sqrt{f} z(f(\tau - t)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rho_z(f, t) & \rightarrow & \varpi_z\left(\frac{v}{f}, f(\tau - t)\right), \end{array} \quad (55)$$

где ϖ_z – масштабнo-временное распределение.

Выражение (55) получено, исходя из условий представления аффинного сдвига в виде: $\frac{1}{\sqrt{a}} z\left(\frac{\tau - t}{a}\right)$, где $a = f_0/f$ – коэффициент масштаба частоты; f_0 – центральная частота, полоса пропускания фильтра (рисунок 5б). Применительно к ИВП – это центральная частота базисного вейвлета [43].

Если положить $f_0 = 1$ Гц, тогда процедуру в ИВП, адаптированную к обработке сигнала, с учетом (48) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} W_z(f, t) &= \sqrt{f} \int_{\tau} z(\tau) \psi^*(f(\tau - t)) d\tau = \\ &= 1/\sqrt{f} \int_v \hat{z}(v) \hat{\psi}^*(v/f) \exp(j2\pi f v) dv. \end{aligned} \quad (56)$$

Инвариантность (55) позволила определить аффинный класс масштабнo-временных распределений (МВР) [19]. Если аффинный сдвиг в сигнале по времени рассматривать как:

$$z(t) \rightarrow z_{\vec{a}, \vec{b}}(t) = \frac{1}{\sqrt{|\vec{a}|}} z\left(\frac{t - \vec{b}}{\vec{a}}\right), \quad (57)$$

то его сдвиг в частотной области соответственно можно выразить как:

$$\hat{z}(v) \rightarrow \hat{z}_{\vec{a}, \vec{b}}(v) = \sqrt{|\vec{a}|} \exp(-j2\pi v \vec{b}) \hat{z}(\vec{a} v). \quad (58)$$

Тогда, согласно (57) и (3), а также с учетом (55) билинейное аффинное масштабирование совместного частотно-временного распределения будет определяться следующим образом:

$$\rho(f, t) \rightarrow \varpi_{z, \vec{a}, \vec{b}}\left(\frac{f_0}{f}, t\right) = \varpi_z\left(\frac{t - \vec{b}}{\vec{a}}, \frac{a}{\vec{a}}\right), \quad (59)$$

где $f_0/f = a$ – масштабирующий множитель.

Учитывая возможность синтеза распределений, используя весовую функцию аффинного сдвига $\Pi\left(\frac{t' - t}{a}, af'\right)$, обобщенное МВР представим следующим образом:

$$\varpi_z(a, t; \Pi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t' - t}{a}, af'\right) \times \rho_z(t', f') dt' df'. \quad (60)$$

Масштабнo-временное представление (60) адекватно описывает распределение плотности сигнальной энергии при условии конечности его энергии:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t, v) dt \frac{dv}{|av|} = 1. \quad (61)$$

Таким образом, множество распределений, формируемых в соответствии с (60), определяют аффинный класс представления сигналов. Правомочность указанного вывода подтверждается непротиворечием его по отношению к ЧВР класса Козна.

Действительно, если положить $a = 1$, что не противоречит условиям определения аффинной группы, то выражение (60) трансформируется к виду (40) (см. [2]), при $\Pi(t' - t, f')$ или $\Pi(t, v)$.

Общий анализ (60) показывает, что выбор конкретного типа МВР формально сводится к выбору аффинного ядра $\Pi(t, v)$, которое представляет двумерную сглаживающую функцию с переменной шириной действующей полосы частот.

Другой подход к синтезу обобщенного выражения для описания МВР базируется на обработке узкополосной функции неопределенности (ФН) $\chi(\xi, \tau)$ с использованием обобщенной весовой функции аффинного преобразования $U_A(\xi, \tau)$:

$$\begin{aligned} \varpi_z(a, t; \Pi) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_A\left(\frac{a}{\tau}, a\xi\right) \chi(\xi, \tau) e^{-j2\pi\xi t} d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (62)$$

где:

$$U_A(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(v, t) e^{j2\pi(v\tau + \xi t)} dv dt. \quad (63)$$

В [8] и [12] предложен подход определения обобщенного МВР описания сигналов с использованием двухчастотного ядра $\Xi(v, f)$:

$$\begin{aligned} \varpi_z(a, t; \Pi) &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Xi(v, f) \times \\ &\times \hat{z}\left(\frac{f-v/2}{a}\right) \hat{z}^*\left(\frac{f+v/2}{a}\right) e^{j2\pi vt/a} dv df, \end{aligned} \quad (64)$$

где:

$$\Xi(v, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t, f) e^{-j2\pi vt} dt. \quad (65)$$

Очевидно, что практическая применимость МВР возможна лишь в том случае, когда они удовлетворяют определенным свойствам, также как ЧВР класса Козна в соответствии с таблицей 1 в [1].

В общем случае МВР обладают рядом положительных свойств с точки зрения их практической применимости в обработке сигналов.

Свойство 1. Сохранение энергии. Совпадение энергии сигнала E_z с энергией МВР, рассредоточенной на масштабно-временной плоскости:

$$E_z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varpi_z(a, t; \Pi) dt \frac{da}{a^2}. \quad (66)$$

Свойство 2. Предельные (маргинальные) свойства. Спектральная плотность энергии и мгновенная мощность сигнала могут быть получены из МВР как предельные распределения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varpi_z(a, t; \Pi) dt = |\hat{z}(v_0/a)|^2, \quad (67)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varpi_z(a, t; \Pi) \frac{da}{a^2} = |z(t)|^2. \quad (68)$$

Свойство 3. Сохранение действительных значений. Любое МВР $\varpi_z(a, t; \Pi)$ является действительной функцией, в общем случае, для любых $a \in L^2(\mathbf{R})$ и $t \in L^2(\mathbf{R})$.

Свойство 4. Локализация во времени. При любом аффинном сдвиге сигнала сохраняется его локализация во времени:

$$\hat{z}(f) = \frac{1}{\sqrt{f}} e^{-j2\pi f t_0} \vartheta_H(f) \Rightarrow \quad (69)$$

$$\varpi_z\left(\frac{f_0}{f}, t; \Pi\right) = f \delta(t - t_0) \vartheta_H(f),$$

где: $\vartheta_H(f) = \begin{cases} 0, & f < v_1 \\ (f/v_2 + 1)/2, & v_1 \leq f \leq v_2 \\ 1, & f > v_2 \end{cases}$ – функция Хевисайда [36].

Свойство 5. Адекватность представления. Временная локализация результата скалярного произведения любых двух функций $z(t)$ и $u(t)$ сохраняется и для произведения их МВР:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} z(t) u^*(t) dt \right|^2 &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varpi_z(a, t; \Pi) \varpi_u^*(a, t; \Pi) dt \frac{da}{a^2}. \end{aligned} \quad (70)$$

Свойство 6. Групповая задержка. Значение групповой задержки для масштабированного сигнала определяется как момент первого порядка его МВР по времени:

$$t_z\left(\frac{f_0}{a}\right) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t \varpi_z(a, t; \Pi) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \varpi_z(a, t; \Pi) dt}. \quad (71)$$

Свойство 7. Унитарность представления [3]. Для узкополосных сигналов МВР совпадает с ЧВР Вигнера:

$$\varpi_z(a, t; \Pi) = \rho_W\left(\frac{f_0}{a}, t\right). \quad (72)$$

Учитывая, что простейшим совместным распределением сигнала в классе Козна является спектрограмма, то воспользовавшись свойством, аналогичным инвариантности, определяемой выражением (40), см. [2], с учетом аффинного характера вносимой инвариантности, можно получить аналогичную простейшую форму для МВР.

Поскольку аффинная инвариантность присуща вейвлетам, то в качестве весовой функции целесообразно выбрать вейвлет-преобразование вида:

$$\Pi(v, t) = W_\psi. \quad (73)$$

Тогда, в результате применения ядра (73) получим масштабogramму [79]:

$$\begin{aligned} |\varpi_M(a, t; \Pi)|^2 &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_W(\xi, v) W_\psi\left(\frac{v-t}{a}, a\xi\right) dv d\xi. \end{aligned} \quad (74)$$

Адекватность подхода к синтезу распределения (74) позволяет рассматривать масштабogramму как некоторый аналог спектрограммы для аффинного класса.

Сделанные предположения позволяют предположить, что МВР (74) будет удовлетворять свойствам (1) и (3), причем модуль выражения обеспечивает ему наличие положительного результата при любом допустимом значении аргумента.

Для исследования особенностей механизма формирования масштабogramм воспользуемся вейвлетом Морле (вейвлет Гаусса 2-го порядка [28]).

Обозначим для функции-окна вейвлета Морле: $\Delta_{\hat{\psi}}$ – спектральная ширина вейвлета, обеспечивающая сглаживание в частотной области; Δ_{ψ} – действующая ширина вейвлета, обеспечивающая сглаживание во временной области.

В процессе синтеза масштабogramмы согласно (74), значения $\Delta_{\hat{\psi}}$ и Δ_{ψ} будут меняться в зависимости от масштабного множителя [35] и в общем случае можно записать:

$$\Delta_{\hat{\psi}}(f) = f \cdot \frac{\Delta_{\hat{\psi}}}{f_0}; \quad (75)$$

$$\Delta_{\psi}(f) = f_0 \cdot \frac{\Delta_{\psi}}{f}.$$

Результат (75) определяет качество анализа процесса с позиций частотно-временного разрешения.

В отличие от Q -анализа для ЧВР класса Коэна, анализ, определяемый (75), является более гибким инструментом, поскольку его разрешение изменяется в зависимости от диапазона. Следовательно, при одинаковом числе операций, необходимых для синтеза распределений, представления аффинного класса обеспечат более качественную декомпозицию обрабатываемых сигналов в частотно-временном пространстве.

Таким образом, компромисс между разрешением по времени и частоте, определяемый неравенством Гейзенберга, сохраняется и в отношении МВР. Постоянство параметра Q обеспечивается взаимозависимостью $\Delta_{\hat{\psi}}$ и Δ_{ψ} , т. е. улучшение одного показателя происходит за счет ухудшения другого. Продуктивность такого подхода рассмотрим на примере анализа суммы двух тестовых сигналов с гиперболическим законом изменения частоты, ограниченных временным окном.

Так, на рисунке 6 представлен фрагмент масштабogramмы тестового сигнала, синтезированной на основе вейвлета Морле.

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что, несмотря на аффинную инвариантность функции-окна, распределение энергии на частотно-временном плане имеет «размытый» характер. В результате сложно определить поло-

жение линии мгновенных частот без априорных сведений о сигнале.

Следует отметить, что применение аналогичных распределений класса Коэна, в частности спектрограммы, также не позволяет получить приемлемых результатов для рассматриваемого случая (рисунок 7).

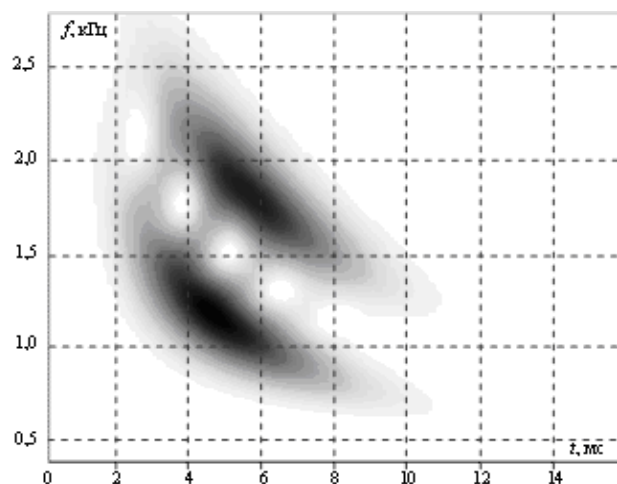


Рис. 6. Масштабogramма тестового сигнала

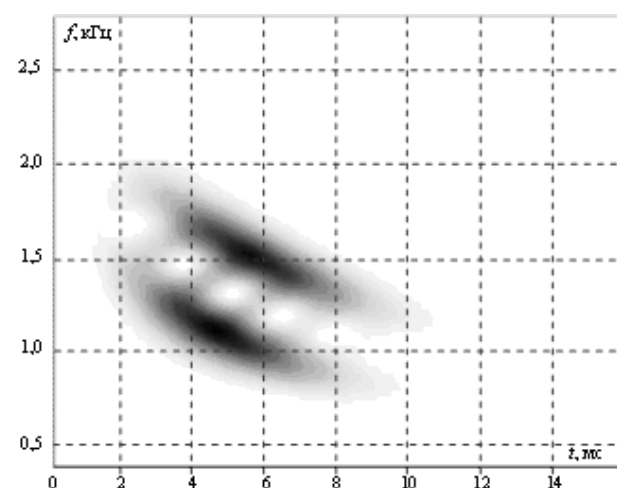


Рис. 7. Спектрограмма тестового сигнала

Более того, результат, полученный на основе спектрограммы, имеет явное смещение относительно истинных частотно-временных координат.

Формальный подход (74), в принципе, может быть обобщен не только на псевдораспределение Вигнера, но и на другие распределения класса Коэна.

С этой целью рассмотрим ядро Коэна с позиций следующей интерпретации [14]:

$$U_A(\xi, \tau) = U_A(\xi\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau}, \quad (76)$$

где f_0 – центральная частота исходного порождающего вейвлета.

Тогда с учетом (76) можно установить следующее соответствие между распределениями класса Козна и аффинного класса:

$$\varpi_z(a, t; U_A) = \rho_z\left(\frac{f_0}{a}, t; U_A\right). \quad (77)$$

В соответствии с (77) в аффинном классе могут быть синтезированы распределения, аналогичные распределению Вигнера, Бьорна – Джордона, Рихачека, Чоя – Вильямса и др.

Так, применение раздельного сглаживания распределения по частоте и по времени на основе функции-окна с аффинной инвариантностью позволяет получить аффинное сглаженное псевдораспределение Вигнера (название по аналогии с $\hat{\rho}_W(f, t)$ класса Козна) [8]:

$$\begin{aligned} \hat{\varpi}_W(a, t) = & \frac{1}{a} \int h_0\left(\frac{\tau}{a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} g_t\left(\frac{v-t}{a}\right) \times \\ & \times z_a^*\left(v - \frac{\tau}{2}\right) z_a\left(v + \frac{\tau}{2}\right) dv e^{-j2\pi\tau f_0/a} d\tau. \end{aligned} \quad (78)$$

Выражение (78) получено при $f_0 = 1$ Гц.

Аффинное сглаженное псевдораспределение Вигнера удовлетворяет свойствам 1 и 3 при условии, что $g_t \in L^2(\mathbf{R})$, а h_0 удовлетворяет условиям функций Эрмита.

На рисунке 8 представлено распределение тестового сигнала, синтезированное в соответствии с выражением (78).

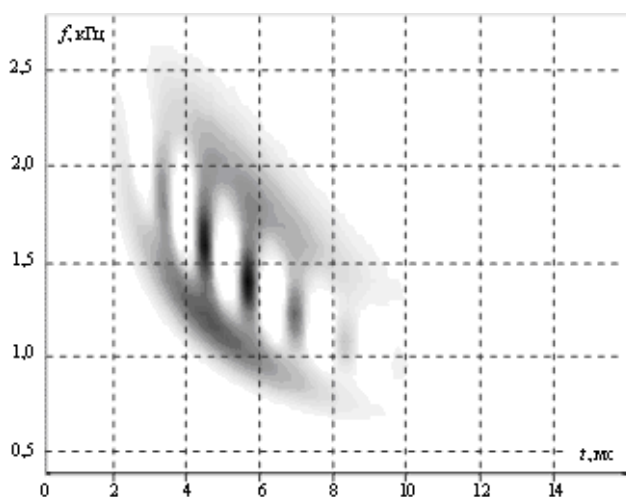


Рис. 8. Аффинное сглаженное псевдораспределение Вигнера тестового сигнала

Отметим, что в отличие от результатов (рисунки 6 и 7) распределение (78) имеет более явно выраженные линии мгновенных частот. Однако ложные всплески энергии, обусловленные межсимвольной интерференцией, не позволяют без априорных данных оценить истинное положение сигнальных компонент.

Следует отметить, что выбор параметров сглаживающих функций позволяет не только управлять разрешением в (78), но и дает возможность осуществлять синтез МВР с заданными свойствами.

В [12] предложено в качестве окон g_t и h_0 использовать различные формы функции Гаусса. Их применение позволяет варьировать результатом (75). В частности, при синтезе масштабограммы задавать значения их действующих полос равным 1, а при синтезе аффинного распределения Вигнера – равным нулю.

В [9] предложен подход к синтезу МВР, базирующийся на выборе соответствующих параметров их двухчастотных ядер $\Xi(v, f)$, определяемых согласно (65). Действительно, если допустить, что:

$$\begin{aligned} \Xi(nu, f) = & G(v)\delta(f - H(v)) - U_A(v, \tau) = \\ = & G(v)\exp(j2\pi H(v)\tau), \end{aligned} \quad (79)$$

где $G(v)$ – произвольная функция (в общем), а $H(v)$ – удовлетворяет условию ее локализации вдоль линии мгновенной частоты $f = H(v)$.

Тогда (64) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \varpi_z(a, t; \Pi) = & \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} G(v) \times \\ & \times \hat{z}\left(\frac{H(v)-v/2}{a}\right) \hat{z}^*\left(\frac{H(v)+v/2}{a}\right) e^{j2\pi vt/a} dv. \end{aligned} \quad (80)$$

Анализ аналитического представления (80) показывает, что двухчастотные ядра хорошо локализируются только в том случае, если описывающая их функция изменяется по закону групповой задержки, который для МВР имеет вид экспоненциальный ($t_z(v) = t_0 + cv^{k-1}$), или логарифмический ($t_z(v) = t_0 + c \log v$).

Следовательно, закон изменения двухчастотных ядер можно связать непосредственно с распределением.

С учетом масштабирующего параметра $a = v_0/v$ формальный переход (77) будет иметь следующий вид:

$$\rho_z(v, t; U_A) = \varpi_z\left(\frac{v_0}{v}, t; U_A\right). \quad (81)$$

В соответствии с указанным подходом рассмотрим порядок синтеза МВР.

Если наложить на функции $G(v)$ и $H(v)$ из обобщенного выражения МВР требования соблюдения свойств 4 и 5, в частности:

$$(v) = \frac{v/2}{\sinh(v/2)} \quad \text{и} \quad H(v) = \frac{v}{2} \coth(v/2), \quad (82)$$

то тогда распределение (80) принимает следующий вид:

$$\varpi_B(a, t) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v/2}{\sinh(v/2)} \hat{z} \left(\frac{v \exp(-v/2)}{2a \sinh(v/2)} \right) \times \\ \times \hat{z}^* \left(\frac{v \exp(v/2)}{2a \sinh(v/2)} \right) e^{j2\pi vt/a} dv, \quad (83)$$

где: $\sinh(v/2) = \frac{\exp(v/2) - \exp(-v/2)}{2}$ – гиперболический синус; $\coth(v/2) = \frac{\exp(v/2) + \exp(-v/2)}{\exp(v/2) - \exp(-v/2)}$ – гиперболический котангенс.

В представленном виде распределение (83) аналогично МВР Бертранда [14]. Оно удовлетворяет свойствам 1–7, за исключением предельной временной локализации.

В [8] показано, что только МВР Бертранда из всех распределений, локализуемых посредством двухчастотного ядра, обеспечивает предельную концентрацию энергии сигналов вдоль линии его мгновенных частот, групповая задержка которых изменяется по гиперболическому закону:

$$\hat{z}(v) = \frac{\exp(jU_{ZA}(v))}{\sqrt{v}} \vartheta_H(v). \quad (84)$$

В [12] значение $U_{ZA}(v)$ определяется следующим образом:

$$U_{ZA}(v) = -2\pi \left(vt_0 - a \lg \left(\frac{v}{v_0} \right) \right), \quad (85)$$

$$\varpi_B \left(a = \frac{v_0}{v}, t \right) = v \delta(t - t_z(v)) \vartheta_H(v), \quad (86)$$

где $t_z(v) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{dU_{ZA}(v)}{dv}$ – групповая задержка сигнала.

На рисунке 9 представлено МВР Бертранда, синтезируемое в соответствии с выражением (83).

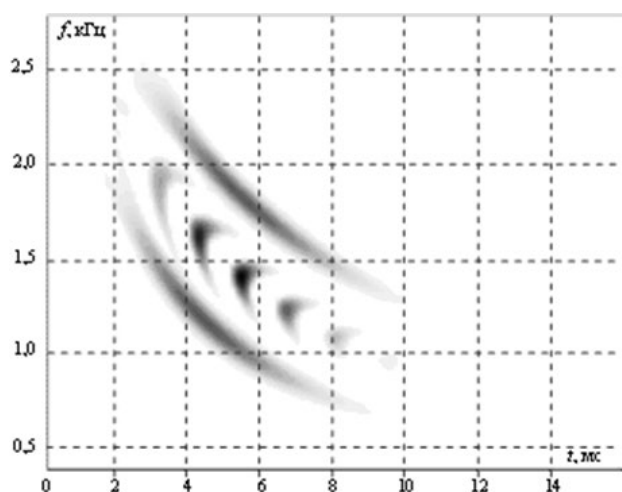


Рис. 9. Масштабно-временное распределение Бертранда тестового сигнала

В общем случае распределение Бертранда в большей степени локализует сигнальную энергию вдоль линий мгновенных частот по сравнению с

масштабограммой. Следовательно, оценки, полученные на его основе, будут более адекватны истинным значениям измеренных параметров.

Вместе с тем следует отметить, что при расчете МВР Бертранда необходимо точно указывать границы частотного диапазона, в пределах которого производятся вычисления. Эти ограничения требуют априорных знаний о частотной области локализации исследуемого процесса (здесь уместней говорить о масштабе частоты).

Ограничения для функций $G(v)$ и $H(v)$, обеспечивают временную локализацию МВР:

$$G(v) = 1 - \left(\frac{v}{4} \right)^2 \text{ и } H(v) = 1 + (v/4)^2, \quad (87)$$

что позволяет получить при подстановке в (80) МВР D -Фландрина [9], которое в некоторой степени представляет собой сглаженную (вдоль оси масштаба и вдоль оси времени) форму МВР Бертранда:

$$\varpi_D(a, t) = \\ = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - (v/4)^2) \hat{z} \left(\frac{[1 - v/4]^2}{a} \right) \times \\ \times \hat{z}^* \left(\frac{[1 + v/4]^2}{a} \right) e^{j2\pi vt/a} dv. \quad (88)$$

Распределение (88) удовлетворяет свойствам 1–4 и 6–7, и из всех распределений, локализуемых посредством двухчастотного ядра, обеспечивает предельную концентрацию энергии сигналов вдоль линии его мгновенных частот, групповая задержка которых изменяется по закону $1/\sqrt{v}$:

$$\hat{z}(v) = \frac{\exp(jU_{ZA}(v))}{\sqrt{v}} \vartheta_H(v). \quad (89)$$

Здесь значения $U_{ZA}(v)$ определяются следующим образом:

$$U_{ZA}(v) = -2\pi(vt_0 + 2a\sqrt{v}), \quad (90)$$

$$\varpi_D \left(a = \frac{v_0}{v}, t \right) = v \delta(t - t_z(v)) \vartheta_H(v). \quad (91)$$

Частотно-временной план МВР D -Фландрина по своей структуре очень близок к МВР Бертранда, поэтому оценки, полученные на его основе, будут сопоставимы со значениями выражения (83).

Среди возможных билинейных распределений аффинного класса, имеющих простое с точки зрения практической реализуемости ядро, необходимо выделить МВР Ундербергерера.

Синтез МВР Ундербергерера возможен при следующем выборе:

$$G(v) = 1 \text{ и } H(v) = \sqrt{1 + (v/2)^2}. \quad (92)$$

В этом случае получаем активную форму МВР Ундербергера:

$$\varpi_{U_a}(a, t) = \frac{1}{|a|} \times \times \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \hat{z}\left(\frac{n}{a}\right) \hat{z}^*\left(\frac{1}{na}\right) \exp\left(j2\pi(n - 1/n)\frac{t}{a}\right) dn. \quad (93)$$

Распределение тестового сигнала (рисунок 11) вида (93) удовлетворяет свойствам 1–4 и 6–7.

Другой выбор параметров, определяющих характер аффинного сдвига:

$$G(v) = \frac{1}{\sqrt{1+(v/2)^2}} \quad \text{и} \quad H(v) = \sqrt{1 + (v/2)^2}, \quad (94)$$

ведет к синтезу так называемой пассивной формы МВР Ундербергера, которая в отличие от формы (93), удовлетворяет свойствам 1–3 и 6–7:

$$\varpi_{U_P}(a, t) = \frac{1}{|a|} \times \times \int_0^{\infty} \frac{1}{n} \hat{z}\left(\frac{n}{a}\right) \hat{z}^*\left(\frac{1}{na}\right) \exp\left(j2\pi(n - 1/n)\frac{t}{a}\right) dn. \quad (95)$$

Следует отметить, что главная особенность распределения Ундербергера состоит в том, что оно из всех распределений, локализуемых посредством двухчастотного ядра, обеспечивает предельную концентрацию энергии сигналов вдоль линии его мгновенных частот, групповая задержка которых изменяется по закону $1/v^2$:

$$\hat{z}(v) = \frac{\exp(jU_{Z_A}(v))}{\sqrt{v}} \vartheta_H(v). \quad (96)$$

В [7] значение $U_{Z_A}(v)$ определяется следующим образом:

$$U_{Z_A}(v) = -2\pi \left(vt_0 - \frac{a}{v}\right), \quad (97)$$

$$\varpi_{U_a}\left(a = \frac{v_0}{v}, t\right) = v\delta(t - t_z(v))\vartheta_H(v). \quad (98)$$

Свойства аффинных распределений еще в большей степени становятся предпочтительными для широкополосных сигналов, поскольку для них ЧВР класса Коэна не способны обеспечить адекватность сдвига по групповой задержке во всей полосе анализа.

В первую очередь это относится к сигналам, мгновенная частота которых может значительно изменяться за время анализа, например, в результате эффекта Доплера.

Для класса таких излучений условие Гейзенберга не остается строгим условием, следовательно, на частотно-временной плоскости распределений класса Коэна не будет соблюдаться адекватность их представления. Поскольку для нестационарных сигналов в общем случае закон изменения групповой задержки не является линейным, то, следова-

тельно, применение для их частотной декомпозиции функций Фурье не совсем уместно.

В первую очередь это вызвано тем, что гармонические функции инвариантны к частотным сдвигам сигнала, но не к его аффинному расширению.

Анализ свойств существующих функциональных базисов декомпозиции показал, что рассмотренным условиям соответствует преобразование Меллина. Полученные на его основе представления в общем случае инвариантны расширениям частоты, которые характерны для сигналов с гиперболическим законом изменения несущей.

В [34] предложено следующее аналитическое описание для преобразования Меллина:

$$M_z(\kappa) = \int_0^{\infty} \hat{z}(v) v^{j2\pi\kappa-1} dv. \quad (99)$$

Для исследования свойств инвариантности распределения (99) рассмотрим два сигнала $y(t)$ и $z(t)$ таких, что $\hat{y}(v) = \hat{z}(av)$.

Тогда в соответствии с (99) получим:

$$M_y(\kappa) = a^{-j2\pi\kappa} M_z(\kappa). \quad (100)$$

Выражение (100) однозначно указывает на характер закона инвариантного расширения, определяемого множителем $v^{j2\pi\kappa}$.

С точки зрения понятия базиса разложения распределение Меллина осуществляется совокупностью функций $\{v^{-j2\pi\kappa}\}$, групповая задержка которых определяется как:

$$t_z(v) = \frac{\kappa}{v}. \quad (101)$$

Фактически параметр "κ" управляет функцией групповой задержки и его можно интерпретировать как параметр масштаба изменения скорости модуляции (в данном случае гиперболической). Результаты, представленные на рисунке 10, поясняют физический смысл преобразования Меллина.

Параметр "κ" есть линейная функция времени, поэтому преобразование Меллина (рисунок 10в) можно представлять как относительно "κ", так и относительно "t". Общий вид результата не изменится за исключением шкалы отображения по оси абсцисс.

Для рассмотренного класса сигналов (в общем случае объединяемых условием $\Delta F_z \approx f_0$, где ΔF_z – ширина спектра сигнала; f_0 – центральная частота спектра) их узкополосная ФН не обеспечивает адекватности представления [74]. На рисунке 11 представлена ФН тестового сигнала (по оси ординат – доплеровский сдвиг; по оси абсцисс – величина групповой задержки).

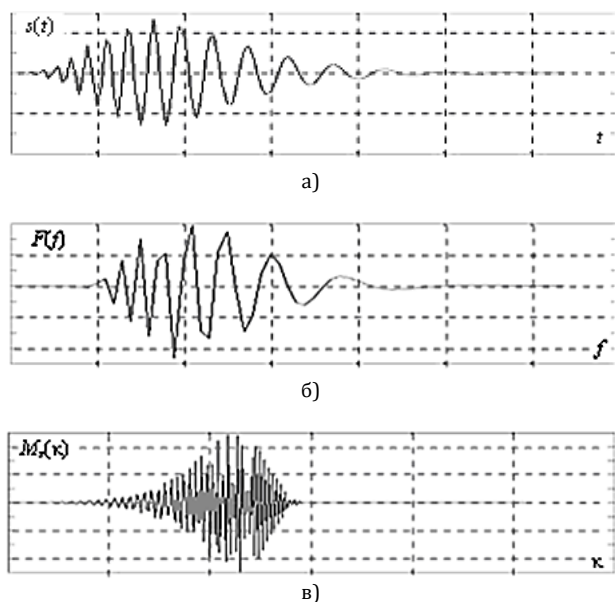


Рис. 10. Доплеровский импульс: а) во временной области; б) в базисе функций Фурье; в) в базисе функций Меллина

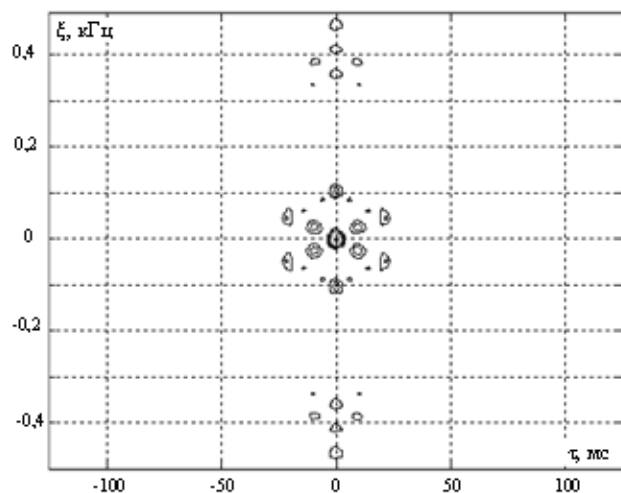


Рис. 11. Функция неопределенности (узкополосная) тестового сигнала

Узкополосная ФН локализует сигнал в центре координатной плоскости и довольно слабо отражает физическую сущность анализируемого процесса. Поэтому для сигналов, имеющих сложный закон изменения мгновенной частоты, в большей степени обосновано применение так называемой широкополосной ФН $\chi_\Delta(a, \tau)$, учитывающей характер нелинейных инвариантных изменений:

$$\begin{aligned} \chi_\Delta(a, \tau) &= a^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} z(t) z^*(t/a - \tau) dt = \\ &= a^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{z}(v) \hat{z}^*(av) e^{j2\pi a\tau v} dv. \end{aligned} \quad (102)$$

Аналитическое описание (102) фактически соответствует вейвлет-преобразованию аналитического сигнала, где в качестве базисного вейвлета

выступает сам сигнал. Результат обработки тестового сигнала широкополосной ФН представлен на рисунке 12. К сожалению, представление (102), так же, как и остальные МВР аффинного класса, не позволяет полностью исключить результат интерференционного взаимодействия двух составляющих тестового сигнала.

В общем случае формулу (102) можно трактовать как аффинную корреляционную функцию, измеряющую формальное сходство между сигналом его трансформируемой версией. Такой подход удобен с точки зрения синтеза практических алгоритмов расчета широкополосной ФН посредством применения двойного преобразования Меллина.

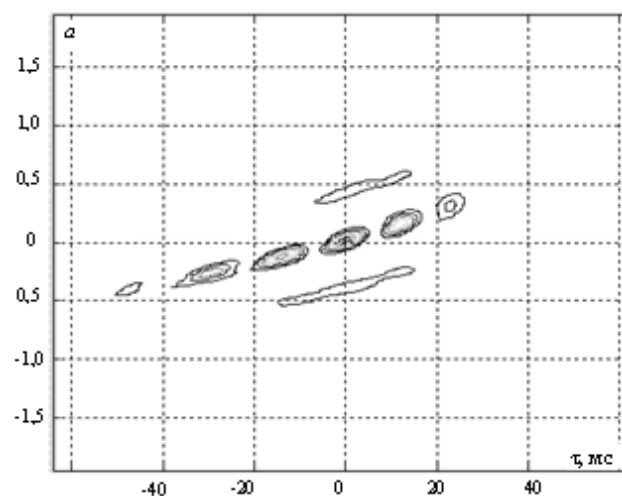


Рис. 12. Функция неопределенности (широкополосная) тестового сигнала

Заключение

Представленные результаты существенно расширяют известные границы частотно-временного анализа, который в настоящем контексте можно интерпретировать как частный случай более общего масштабно-временного анализа.

Предложенные подходы в гораздо большей степени адаптированы к исследованию процессов с нестационарным изменением параметров на интервале обработки и анализа.

Разработанный аналитический аппарат позволяет рассматривать его как инструмент анализа тонкой структуры сигналов. Представленные примеры обработки кратковременных фрагментов сигналов с высоким уровнем нестационарности их параметров

Таким образом, можно заключить, что теория частотно-временного анализа, заложенная Коэнм еще в середине прошлого века, продолжает свое развитие, открывая новые возможности для дальнейшего поиска эффективных процедур обработки сигналов в приложении к практическим задачам всех видов связи и телекоммуникаций [39].

Список используемых источников

1. Дворников С.В. Теоретические основы синтеза билинейных распределений энергии нестационарных процессов в частотно-временном пространстве (обзор) // Труды учебных заведений связи. 2018. Т. 4. № 1. С. 47–60. DOI:10.31854/1813-324X-2018-1-47-60.
2. Дворников С.В. Билинейные распределения с пониженным уровнем интерференционного фона в частотно-временном пространстве: продолжение обзора // Труды учебных заведений связи. 2018. Т. 4. № 2. С. 69–81. DOI:10.31854/1813-324X-2018-2-69-81.
3. Cohen L. Time-Frequency Distribution – a Review // Proceedings of the IEEE. 1989. Vol. 77. Iss. 7. PP. 941–981. DOI:10.1109/5.30749.
4. Claasen T.A.C.M., Meulenbrauker W.F.G. The Wigner Distribution – a Tool for Time-Frequency Signal Analysis. Part 1, 2, 3 // Philips Journal of Research. 1980. Vol. 35. PP. 217–250, 276–300, 372–389.
5. Дворников С.В. Теоретические основы синтеза частотно-временных представлений класса Коэна // Информация и космос. 2008. № 3. С. 16–24.
6. Дворников С.В., Кудрявцев А.М. Теоретические основы частотно-временного анализа кратковременных сигналов: монография. СПб.: ВАС, 2010. 240 с.
7. Bertrand J., Bertrand P. Affine time-frequency distributions in Time-Frequency Signal Analysis – Methods and Applications. Melbourne, Australia: Longman–Cheshire, 1991.
8. Bertrand J., Bertrand P. A class of affine Wigner functions with extended covariance properties // Journal of Mathematical Physics. 1992. Vol. 33. Iss. 7. DOI:10.1063/1.529570.
9. Flandrin P. Time-Frequency / Time-Scale Analysis. San Diego: Academic Press, 1999 (translated by Stöckler from the French editions, Temps-frequency. Paris: Hermes, 1993).
10. Flandrin P., Gonsalves P. Geometry of affine distributions // Proceedings of IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis, Philadelphia, PA, USA, 1994. PP. 80–83. DOI:10.1109/TFSA.1994.467359.
11. Baraniuk R.G. Covariant Time-Frequency Representations through Unitary Equivalence // IEEE Signal Processing Letters. 1996. Vol. 3. № 3. PP. 79–81. DOI:10.1109/97.481161.
12. Auger F., Flandrin P. Improving the readability of time-frequency and time-scale representation by the reassignment method // IEEE Transactions on Signal Processing. 1995. Vol. 43. Iss. 5. PP. 1068–1089. DOI:10.1109/78.382394.
13. Дворников С.В., Алексеева Т.Е. Распределение Алексеева и его применение в задачах частотно-временной обработки сигналов // Информация и космос. 2006. № 3. С. 9–20.
14. Дворников С.В. Теоретические основы синтеза билинейных распределений. СПб.: ВАС, 2007. 268 с.
15. Алексеев А.А., Кириллов А.Б. Технический анализ сигналов и распознавание радиоизлучений. СПб.: ВАС, 1998. 368 с.
16. Дворников С.В. Проблема поиска сигналов источников информации при радиомониторинге // Мобильные системы. 2007. № 4. С. 33–35.
17. Daubechies I. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis // IEEE Transactions on Information Theory. 1990. Vol. 36. Iss. 5. PP. 961–1005. DOI:10.1109/18.57199.
18. Meyer Y. Ondelettes et operateurs. Vol. 1. Paris: Hermann, 1990.
19. Rioul O., Flandrin P. Time-Scale Energy Distributions: A General Class Extending Wavelet Transforms // IEEE Transactions on Signal Processing. 1992. Vol. 40. No. 7. PP. 1746–1757.
20. Дворников С.В., Бородин Е.Ю., Маджар Х., Махлуф Ю.Х. Частотно-временное оценивание параметров сигналов на основе функций огибающих плотности распределения их энергии // Информация и космос. 2007. № 4. С. 41–45.
21. Дворников С.В., Яхеев А.Ф. Метод измерения параметров кратковременных сигналов на основе распределения Алексеева // Информация и космос. 2011. № 1. С. 66–74.
22. Дворников С.В., Железняк В.К., Храмов Р.Н., Желнин С.Р., Медведев М.В., Симонов А.Н., Сауков А.М. Метод обнаружения радиоизлучений на основе частотно-временного распределения Алексеева // Научное приборостроение. 2006. Т. 16. № 1. С. 107–115.
23. Дворников С.В., Осадчий А.И., Дворников С.С., Родин Д.В. Демодуляция сигналов на основе обработки их модифицированных распределений // Контроль. Диагностика. 2010. № 10. С. 46–54.
24. Яхеев А.Ф., Дворников С.В. Измерение параметров сигналов на основе оптимизации формы распределения Алексеева // Наукоемкие технологии. 2009. Т. 10. № 1. С. 25–28.
25. Дворников С.В. Демодуляция сигналов на основе обработки их модифицированных частотно-временных распределений // Цифровая обработка сигналов. 2009. № 2. С. 7–11.
26. Дворников С.В., Сауков А.М. Модификация частотно-временных описаний нестационарных процессов на основе показательных и степенных функций // Научное приборостроение. 2004. Т. 14. № 3. С. 76–85.
27. Чуи Ч. Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001. 412 с.
28. Дворников С.В., Дворников С.С., Спирин А.М. Синтез манипулированных сигналов на основе вейвлет-функций. // Информационные технологии. 2013. № 12. С. 52–55.
29. Дворников С.В. Теоретические основы представления сигнала в аналитическом виде функциями его огибающей и полной фазы // Научное приборостроение. 2006. Т. 16. № 4. С. 106–111.
30. Gonsalves P., Baraniuk R.G. A Pseudo-Bertrand Distribution for Time-Scale Analysis // IEEE Signal Processing Letters. 1996. Vol. 3. Iss. 3. PP. 82–84. DOI:10.1109/97.481162.
31. Дворников С.В., Желнин С.Р., Медведев М.В. Метод формирования признаков распознавания сигналов диапазона декаметровых волн по их вейвлет-коэффициентам, рассчитанным на основе лифтинговой схемы // Информация и Космос. 2006. № 2. С. 68–73.
32. Mallat S.G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1989. Vol. 11. Iss. 7. PP. 674–693. DOI:10.1109/34.192463.

33. Аладинский В.А., Дворников С.В., Сауков А.М., Симонов А.Н. Способ распознавания радиосигналов. Патент на изобретение RUS 2261476 от 26.01.2004.
34. Ovarlez J.-P. La transformation de Mellin et l'analyse des signaux large bande // Journées Thématiques GdR CNRS «Traitement du Signal et Images». 8 et 9 Mars. 1994. INSA Lyon.
35. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
36. Cohen L. Time-Frequency Analysis. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995.
37. Grossmann A., Morlet J. Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape // SI-AM Journal on Mathematical Analysis. 2006. Vol. 15. Iss. 4. DOI:10.1137/0515056.
38. Coifman R., Meyer Y., Wickerhauser V. Wavelet Analysis and Signal Processing // In Wavelets and their Applications. Boston: Jones and Bartlett. 1992. PP. 153–178.
39. Дворников С.В. Цифровой синтез спектрально-эффективных сигналов телевидения // Вопросы радиоэлектроники. Серия: Техника телевидения. 2015. № 6. С. 168–173.
40. Cohen A., Daubechies I. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets III. Better Frequency Resolution // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2006. Vol. 24. Iss. 2. DOI:10.1137/0524032.
41. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛЮН-Р, 2002. 448 с.
42. Rioul O., Vetterli M. Wavelets and signal processing // IEEE Signal Processing Magazine. 1991. Vol. 8. Iss. 4. PP. 14–38. DOI:10.1109/79.91217.

* * *

BILINEAR SCALE-TEMPORARY DISTRIBUTIONS OF ENERGY OF THE AFFINE CLASS IN THE FREQUENCY-TEMPORARY SPACE (continued review)

S. Dvornikov¹

¹Telecommunications Military Academy,
St. Petersburg, 194064, Russian Federation

Article info

Article in Russian

For citation: Dvornikov S. Bilinear Scale-Temporary Distributions of Energy of the Affine Class in the Frequency-Temporary Space: Continued Review // Proceedings of Telecommunication Universities. 2018. Vol. 4. Iss. 3. PP. 26–44.

Abstract: *The review of theoretical bases of synthesis of scale-time distributions of an affine class is presented. The methodology of wavelet transforms with an adaptive analysis window is analyzed in the interest of processing processes with high parameter non-stationarity. Analytic approaches to synthesis of distributions invariant to affine shifts are generalized. The generality of the scale-time and frequency-time distributions is shown. Analytical expressions and experimental results of the most known forms of affine class distributions are given.*

Keywords: *scale-time distributions, methods for processing processes with high parameter non-stationarity, affine-class distribution, wavelet transforms.*