

Научная статья

УДК 004:519.854

<https://doi.org/10.31854/1813-324X-2026-12-2-7-25>

EDN:VOGGBN



Целочисленная оптимизация составов и расписаний выполнения пакетов в системах Flow Shop при изменяющейся периодичности обслуживания приборов

✉ Кирилл Викторович Кротов, krotov_k1@mail.ru

Севастопольский государственный университет,
Севастополь, 299053, Российская Федерация

Аннотация

Реализация процессов выполнения пакетов заданий в системах Flow Shop подвержена влиянию отказов приборов и их простоев при восстановлении. Поддержание заданного уровня надежности систем обеспечивается периодическим техническим обслуживанием их приборов, связанным с устранением неполадок, являющихся причинами отказов. В течение интервалов времени обслуживания приборы являются недоступными для реализации назначенных им функций. Планирование обслуживания приборов позволяет определить интервалы времени между их реализациями. Однако положение реализаций обслуживания приборов может не являться фиксированным, а только – входить во временные интервалы заданной длительности (временные «окна»). В этом случае положение реализаций обслуживания приборов оптимизируется с учетом характера процессов выполнения пакетов заданий в системах. В то же время выполняемые в системах задания, включаемые в пакеты, могут входить в состав заказов, для которых заданы директивные сроки окончания исполнения. Вследствие этого **актуальна** задача оптимизации составов пакетов заданий, включения пакетов в интервалы доступности приборов не фиксированной длительности, порядков выполнения пакетов в этих интервалах при вхождении заданий в заказы, с определенными для них директивными сроками. При незначительных размерах задач их решения могут быть получены путем использования смешанного целочисленного линейного программирования.


Цель работы состоит в формировании новой математической модели целочисленного программирования оптимизации решений указанного вида. Для ее достижения использованы **методы** построения моделей математического программирования. На первом этапе реализовано формирование нелинейной математической модели. Получены выражения, используемые для построения ограничений, соответствующих распределению всех заданий по пакетам. С целью снижения временных затрат на получение решений проведена линеаризация модели. Для ее верификации разработано приложение в среде IBM ILOG CPLEX. В ходе исследований получены **результаты**, которые показали эффективность модели для решения задач планирования выполнения пакетов заданий в системах Flow Shop при изменяющейся периодичности обслуживания и условия вхождения заданий в заказы с определенными для них директивными сроками исполнения. Результаты имеют **практическую значимость** при решении задач малой размерности построения расписаний выполнения пакетов заданий в производственных системах.

Ключевые слова: математические модели смешанного целочисленного линейного программирования, периодическое техническое обслуживание приборов, пакеты заданий, конвейерные системы, расписания

Ссылка для цитирования: Кротов К.В. Целочисленная оптимизация составов и расписаний выполнения пакетов в системах Flow Shop при изменяющейся периодичности обслуживания приборов // Труды учебных заведений связи. 2026. Т. 12. № 2. С. 7–25. DOI:10.31854/1813-324X-2026-12-2-7-25. EDN:VOGGBN

Original research
<https://doi.org/10.31854/1813-324X-2026-12-2-7-25>
EDN:VOGGBN

Integer Optimization of Package Compositions and Schedules in Flow Shop Systems with Varying Frequency of Instrument Maintenance

 Kirill V. Krotov, krotov_k1@mail.ru

Sevastopol State University,
Sevastopol, 299053, Russian Federation

Annotation

The implementation of job package execution processes in Flow Shop systems is affected by instrument failures and downtime during recovery. Maintaining a given level of reliability of the systems is ensured by periodic maintenance of their devices related to troubleshooting, which are the causes of failures. During the maintenance time intervals, the devices are unavailable for the implementation of their assigned functions. Device maintenance planning allows you to determine the time intervals between their implementations. However, the position of the instrument maintenance implementations may not be fixed, but may fall within time intervals of a given duration (time "windows"). In this case, the position of instrument maintenance implementations is optimized taking into account the nature of the processes of completing task packages in the systems. At the same time, tasks performed in systems that are included in packages may be part of orders for which specific deadlines have been set. As a result, the task of optimizing the composition of task packages, including packages in the availability intervals of devices of non-fixed duration, and the order of execution of packages in these intervals when tasks enter orders, with specific deadlines for them, is urgent. With small problem sizes, their solutions can be obtained by using mixed integer linear programming.

The purpose of the work is to form a new mathematical model of integer programming for optimizing solutions of this type. **Methods** of constructing mathematical programming models were used to achieve this goal. At the first stage, the formation of a nonlinear mathematical model was implemented. Expressions are obtained that are used to construct constraints corresponding to the distribution of all tasks into packages. In order to reduce the time spent on obtaining solutions, the model was linearized. To verify it, an application has been developed in the IBM ILOG CPLEX environment. In the course of the research, **results** were obtained that showed the effectiveness of the model for solving the tasks of planning the execution of task packages in Flow Shop systems with varying service frequency and the condition that tasks are included in orders with specific deadlines for their execution. The results are of **practical importance** in solving small-dimensional problems of constructing scenarios for completing task packages in production systems.

Keywords: mathematical models of mixed integer linear programming, periodic maintenance of devices, task packages, conveyor systems, schedules

For citation: Krotov K.V. Integer Optimization of Package Compositions and Schedules in Flow Shop Systems with Varying Frequency of Instrument Maintenance. *Proceedings of Telecommunication Universities*. 2026;12(2):7–25. (in Russ.) DOI:10.31854/1813-324X-2026-12-2-7-25. EDN:VOGGBN

Введение

Дисциплина обслуживания заданий в конвейерных системах (КС) или системах Flow Shop предполагает последовательное прохождение ими всех приборов, входящих в эти системы. Типизация заданий, выполняющихся в этих системах, осуществляется с точки зрения равных значений времени

осуществления операций с ними на приборах систем и равных значений времени переналадок приборов на реализацию действий с ними. Для увеличения производительности процессов выполнения заданий разных типов в указанных системах осуществляется формирование пакетов однотипных заданий. Задания одного типа, включенные в па-

кеты, выполняются на приборах конвейерных систем последовательно. То есть, время окончания осуществления операций с пакетом равно моменту времени окончания выполнения последнего задания в нем. Переналадка приборов реализуется при переходе от действий с заданиями в одном пакете к проведению операций с заданиями в другом пакете. Тогда пакет – это совокупность однотипных заданий, выполняемых на приборах последовательно без переналадки.

В КС (системах Flow Shop) операции с заданиями, включенными в пакеты, могут быть выполнены в течение интервалов времени функционирования приборов, после окончания каждого из которых реализуется их (приборов) периодическое техническое обслуживание (ПТО). Реализация ПТО приборов позволяет идентифицировать неисправности в них, устранять эти неисправности, что обеспечивает исключение значительных отказов приборов, восстановление после которых занимает длительное время. К политикам реализации ПТО приборов относятся: 1) проведение ПТО через заданные интервалы времени функционирования приборов; 2) оптимизация периодов между ПТО приборов для обеспечения максимальной их надежности при ограничениях на используемые ресурсы (в частности, при ограничении простоев приборов, обеспечении заданной эффективности процессов выполнения заданий в КС); 3) поддержание заданного уровня надежности системы при оптимизации эффективности процессов выполнения заданий в КС. При осуществлении политики первого вида действия, позволяющие поддерживать приборы в работоспособном состоянии, реализуются через определенные интервалы времени. Тогда в течение интервалов времени заданной длительности между ПТО приборы осуществляют операции с заданиями, при реализации ПТО являются недоступными. Однако длительности интервалов времени доступности приборов могут быть не фиксированными, моменты времени окончания этих интервалов могут входить в установленные временные интервалы, которые названы временными «окнами». В этом случае положение ПТО приборов и, соответственно, положения интервалов времени их недоступности, оптимизируются внутри этих временных «окон». Возникает задача оптимизации решений по назначению однотипных заданий в составы пакетов, включению пакетов в интервалы доступности приборов, определения порядков пакетов для проведения операций с ними в течение указанных периодов времени. Использование рассматриваемого подхода позволяет получать более эффективные результаты планирования указанных процессов выполнения пакетов заданий (ПЗ) в КС с учетом ПТО приборов, увеличить их производительность.

Могут быть определены два способа решения задач оптимизации составов ПЗ и порядков их выполнения на приборах КС. Первый предусматривает оптимизацию количества заданий в пакетах. Вычисление характеристик процессов выполнения ПЗ в КС реализуется при условии, что пакеты передаются между приборами целиком. Этот подход применен в [1] при разработке модели Mixed Integer Linear Programming (MILP) оптимизации количества заданий разных типов в пакетах и расписаний выполнения ПЗ в КС. Второй способ предусматривает вычисление характеристик процессов выполнения ПЗ в КС с учетом того, что задания передаются с предшествующего прибора на последующий сразу при окончании действий с ними на первом из них без ожидания окончания выполнения других заданий из этого пакета. Этот способ положен в основу разрабатываемой математической модели MILP оптимизации распределения заданий разных типов по пакетам и расписаний выполнения ПЗ в КС с учетом ПТО приборов. Осуществляемые исследования базируются на результатах работы [2], продолжение которых предусматривает решение задачи оптимизации составов ПЗ и расписаний их выполнения в КС при учете интервалов доступности приборов нефиксированной (изменяющейся) длительности. В то же время постановка задачи исследований предусматривает, что результаты выполнения разнотипных заданий, распределяемых по пакетам, входят в различные заказы, для которых заданы директивные сроки окончания их исполнения.

Таким образом, развитие работы [2] предусматривает построение новой математической модели MILP оптимизации составов ПЗ, их (пакетов) включения в интервалы доступности приборов нефиксированной длительности, расписаний выполнения ПЗ в рамках указанных интервалов доступности приборов, а также оптимизации положения реализаций ПТО приборов в пределах временных «окон», начало и окончание которых определены в условиях задачи. То есть оптимизация решений по составам ПЗ и расписаниям их выполнения в КС осуществляется при условии, что длительности интервалов доступности приборов могут быть изменены, положение реализаций ПТО приборов оптимизируется в пределах заданных временных «окон». При этом построение указанной модели MILP осуществляется с учетом условия, предусматривающего, что результаты выполнения в КС заданий, распределенных по пакетам, включаются в заказы, для которых определены директивные сроки окончания их исполнения. Представленные особенности отличают задачу, решаемую в рассматриваемой работе, от задачи, решенной в работе [2], и обеспечиваю ее оригинальность.

Существующие результаты исследований, связанных с оптимизацией расписаний выполнения заданий и размещению реализаций ПТО приборов, позволяют решать задачи планирования: 1) выпуска продукции на производственных предприятиях при условии проведения ПТО систем в целом [3–6]; 2) выполнения единичных заданий (ЕЗ) совместно с определением моментов времени начала ПТО приборов [7–15]; 3) операций с ЕЗ в системах разного вида при известных моментах времени начала ПТО (заданной периодичности ПТО и ограничениях на доступность приборов [16–21]).

Работы [3–21] отражают результаты исследований зарубежных авторов. Исследования российских ученых в основном направлены на разработку методов оптимизации производственных расписаний выполнения ЕЗ в мелко- и среднесерийном производстве [22–24], оптимизации рейсов воздушных судов авиакомпаний [25], расписаний учебных занятий в вузах [26–29] и отдельно графиков проведения ПТО оборудования без оптимизации расписаний [30–33]. Особого интереса заслуживает статья [30], в которой оптимизируется расписание работы ремонтных бригад в соответствии с графиком ПТО оборудования. Однако ответственными исследователями не решаются задачи совместной оптимизации расписаний выполнения заданий (в том числе пакетов заданий) в обрабатывающих системах разного вида совместно с оптимизацией графика ПТО.

Анализ существующих моделей и методов оптимизации решения задач рассматриваемого вида показал, что ни одна из рассмотренных работ не содержит результаты, использование которых позволяет осуществлять оптимизацию составов ПЗ и их порядков для проведения операций с ними в КС при учете ПТО приборов [3–21]. Эти модели и методы не учитывают возможность изменения положения реализаций ПТО в пределах временных «окон» заданной длительности. Задача оптимизации составов ПЗ и расписаний их выполнения при нефиксированных длительностях интервалов времени доступности приборов, которые могут быть изменены с целью повышения эффективности процессов осуществления операций с ними в КС, не является решенной. Также при решении задачи должно быть учтено условие включения в заказы результатов выполнения заданий из пакетов, для которых определены директивные сроки окончания их исполнения.

По этой причине решение рассматриваемой задачи оптимизации составов пакетов, включения пакетов в интервалы доступности приборов нефиксированной длительности, расписаний выполнения пакетов внутри этих интервалов, определения длительностей самих интервалов времени яв-

ляется актуальным. В постановке задачи исследований определены: 1) тип обрабатываемых систем – конвейерные системы; 2) способ типизации заданий в соответствии с равными значениями времени их выполнения на приборах и переналадок приборов на их выполнение; 3) необходимость формирования пакетов и оптимизации их составов; 4) вид передачи заданий из пакетов между приборами, который предусматривает их перемещение с предшествующего прибора на последующий после окончания их выполнения на первом из приборов; 5) ограничения на интервалы времени доступности и недоступности приборов (каждый интервал времени недоступности приборов входит в соответствующее временное «окно», его положение оптимизируется в рамках этого окна с целью повышения эффективности процессов выполнения ПЗ в КС и реализаций ПТО); 6) необходимость включения результатов выполнения заданий из пакетов в заказы, для которых определены директивные сроки окончания исполнения. Требуется разработать новую математическую модель MILP оптимизации решений рассматриваемого вида и программу в среде IBM ILOG CPLEX для этой модели. На основе программы требуется провести верификацию модели и определить особенности решений по размещению реализаций ПТО внутри временных «окон» в зависимости от параметров процессов выполнения ПЗ в КС.

Математическая модель оптимизации составов и расписаний выполнения пакетов заданий в системах Flow Shop при изменяющейся периодичности обслуживания приборов

При построении математической модели, применяемой для оптимизации решений рассматриваемого вида, использованы обозначения, аналогичные введенным в работе [2], а также введены новые обозначения. Обозначения, используемые при построении новой математической модели MILP оптимизации рассматриваемых решений, представлены в таблице 1.

Особенностью задачи является включение результатов выполнения заданий каждого w -го типа в количестве n_{wk} в состав только одного заказа, то есть $\sum_{k=1}^K r_{wk} = 1$ ($w = \overline{1, W}$). Через M обозначено большое число, заданное равным 1000, чтобы гарантировать, во-первых, положительные значения правых частей ограничений при условии, что значения переменных решения и индикаторных переменных равны 1, во-вторых, отрицательные значения правых частей ограничений при условии, что значения переменных решения и индикаторных переменных равны 0.

Реализации ПТО приборов позволяют обнаружить и устранить в них неисправности и непо-

ладки, являющиеся причинами их отказов. В результате чего предполагается, что значительные отказы этих приборов, вызывающие их длительное восстановление, невозможны. В процессе функционирования приборов после ПТО могут возникнуть незначительные отказы, длительности восстановления приборов после которых много меньше времени выполнения заданий.

ТАБЛИЦА 1. Обозначения параметров и решений задачи, используемых при построении модели MILP

TABLE 1. Designations of the Parameters and Solutions of the Problem Used in the Construction of the MILP Model

| Обозначение | Интерпретация |
|--|--|
| Индексы приборов, заданий, пакетов, заказов, интервалов доступности | |
| (1) | (2) |
| l | Индекс прибора |
| b | Индекс интервала доступности приборов, в течение которого реализуется выполнение ПЗ, предшествующий b -й реализации их ПТО |
| j | Номер, под которым пакет включен в последовательность выполнения ПЗ в b -м интервале доступности приборов |
| i | Номер для задания, включенного в пакет под номером j в b -м интервале доступности приборов |
| w | Тип заданий, выполняемых в составе пакетов в КС |
| k | Индекс заказа |
| Параметры, характеризующие количество приборов, количество заданий, пакетов, заказов и интервалов доступности приборов | |
| L | Количество приборов |
| J | Количество пакетов, которые могут быть назначены в b -е интервалы доступности приборов |
| I | Количество заданий, которые будут включены в пакеты |
| B | Количество реализаций ПТО приборов |
| W | Количество типов заданий |
| K | Количество заказов |
| Параметры, характеризующие процессы выполнения заданий на приборах КС и формирование заказов | |
| $\mathbf{T} = \ \ t_{lw}\ \ _{L \times W}$ | Матрица длительностей выполнения заданий w -х типов на l -х приборах КС |
| $\mathbf{P} = \ \ p_{lw}\ \ _{L \times W}$ | Матрица длительностей наладок l -х приборов на выполнение заданий w -х типов |
| $\mathbf{R} = \ \ r_{wk}\ \ _{W \times K}$ | Матрица типов w заданий, результаты выполнения которых распределяются по заказам k -х типов ($r_{wk} = 1$, если задания w -го типа включены в заказ k -го типа, $r_{wk} = 0$ в противном случае) |
| $\mathbf{N} = \ \ n_{wk}\ \ _{W \times K}$ | Матрица количества результатов выполнения заданий w -х типов, включаемых в заказы k -х типов |
| $\mathbf{D} = \ \ d_k\ \ $ | Вектор директивных сроков окончания исполнения заказов |

| Обозначение | Интерпретация |
|---|--|
| Индексы приборов, заданий, пакетов, заказов, интервалов доступности | |
| (1) | (2) |
| Параметры, характеризующие границы временных «окон» и длительности ПТО приборов | |
| s_{lb} | Значение левой границы временного интервала («окна»), в котором оптимизируется положение b -й реализации ПТО l -го прибора |
| e_{lb} | Значение правой границы временного интервала («окна»), в котором оптимизируется положение b -й реализации ПТО l -го прибора |
| t_l^{pm} | Длительность ПТО l -го прибора |
| τ | Длительность интервала времени, применяемого при оптимизации сдвига реализаций ПТО приборов относительно левых границ временных «окон» |
| Переменные решения задачи | |
| x_{ijb} | Переменная, характеризующая распределение заданий по пакетам в интервалах времени доступности приборов ($x_{ijb} = 1$, если задание распределено под номером i в пакет, который включен под номером j в b -й интервал доступности l -х приборов, $x_{ijb} = 0$ в противном случае) |
| y_{wjb} | Переменная, характеризующая типы заданий, включенных в пакеты внутри интервалов доступности приборов ($y_{wjb} = 1$, если пакет, включенный под номером j в b -й интервал доступности, содержит задания w -го типа, $y_{wjb} = 0$ в противном случае) |
| u_{jb} | Переменная, характеризующая включение в b -е интервалы доступности l -х приборов ПЗ под номерами j ($u_{jb} = 1$, если в b -й интервал доступности l -х приборов ПЗ включен под номером j – занимает j -ю позицию в последовательностях их выполнения в b -м интервале доступности; $u_{jb} = 0$ в противном случае) |
| k_{lb}^{pm} | Количество интервалов времени τ , соответствующих смещению начала b -й реализации ПТО l -го прибора относительно левой границы s_{lb} интервала $[s_{lb}; e_{lb}]$ (смещение равно $k_{lb}^{pm} \tau$) |
| q_{ijb}^l | Момент времени начала реализации операций с заданием, включенным под номером i в пакет, размещенный под номером j в b -м интервале доступности l -го прибора |
| g_{jb}^l | Момент времени завершения операций на l -м приборе с ПЗ, включенным под j -м номером в его b -й интервал доступности |
| g_k | Момент времени окончания исполнения k -го заказа; количество типов заданий |
| p_k | Запаздывание с исполнением k -го заказа относительно директивного срока d_k |

Поэтому незначительными отказами приборов, возникающими после ПТО, длительности восстановления после которых минимальны, можно пренебречь. Начало и окончание реализаций ПТО при-

боров не являются фиксированными, а входят в заданные интервалы времени $[s_{lb}; e_{lb}]$ (временные «окна»), в рамках которых их положение оптимизируется с целью увеличения эффективности процессов выполнения ПЗ в КС. Таким образом, $[s_{lb}; e_{lb}]$ – это интервалы времени, в пределах которых оптимизируется положение b -х реализаций ПТО l -х приборов с учетом требования повышения общей производительности процессов выполнения ПЗ в КС. Реализация ПТО может начинаться в момент времени, не меньший левой границы интервала, окончание ПТО не может превышать его правую границу. Разработка модели MILP оптимизации наряду с составами ПЗ и расписаниями их выполнения в КС также и положения ПТО приборов в рамках временных «окон» (при учете условия исполнения заказов в заданные директивные сроки) позволяет обеспечить развитие математической модели, предложенной в [2], и как следствие, новизну и оригинальность получаемых результатов.

При формировании ограничений модели, позволяющих вычислять значения q_{ijb}^l моментов времени начала выполнения i -х заданий в j -х пакетах, включенных в b -е интервалы доступности l -х приборов ($i = \overline{1, I}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B + 1}; l = \overline{1, L}$), использованы предположения о том, что количество заданий в пакетах должно быть не менее двух, и в b -е интервалы доступности приборов будет включен хотя бы один пакет. Кроме того, предполагается, что составы ПЗ, включенных в одни и те же b -е интервалы доступности ($b = \overline{1, B + 1}$) l -х приборов ($l = \overline{1, L}$), не имеют отличий; одинаковыми являются и порядки выполнения на приборах КС пакетов заданий, включенных в одни и те же интервалы доступности.

При построении системы ограничений, позволяющих вычислить значения q_{ijb}^l , в основу положена базовая модель оптимизации решений, предложенная в работе [2, выражения (2–26), стр. 14]. Эта модель позволяет оптимизировать решения при фиксированных интервалах времени доступности приборов. С учетом введенных в рассмотрение обозначений система ограничений, используемая для вычисления значений q_{ijb}^l и соответствующая базовой модели оптимизации решений из [2, ограничения (14–22), стр. 14] (при фиксированных интервалах времени доступности приборов), имеет следующий вид:

$$q_{111}^1 \geq \sum_{w=1}^W p_{1w} y_{w11}, \quad (1)$$

$$q_{11b}^1 \geq e_{1,b-1} + \sum_{w=1}^W p_{1w} y_{w1b}, \quad b = \overline{2, B + 1}, \quad (2)$$

$$q_{1jb}^1 \geq g_{j-1,b}^1 + \sum_{w=1}^W p_{1w} y_{w1b} - M \cdot (1 - u_{jb}), \quad (3)$$

$$j = \overline{2, J}, \quad b = \overline{1, B + 1},$$

$$q_{ijb}^1 \geq q_{i-1,j,b}^1 + \sum_{w=1}^W t_{1w} y_{wjb} - M \cdot (1 - x_{ijb}), \quad (4)$$

$$i = \overline{2, I}, \quad j = \overline{1, J}, \quad b = \overline{1, B + 1},$$

$$g_{jb}^l \geq q_{ijb}^l + \sum_{w=1}^W t_{lw} y_{wjb} - M \cdot (2 - u_{jb} - x_{ijb}), \quad (5)$$

$$i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}, \quad b = \overline{1, B + 1}, \quad l = \overline{1, L},$$

$$q_{111}^l \geq \max(q_{111}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w11}; \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w11}), \quad (6)$$

$$l = \overline{2, L},$$

$$q_{11b}^l \geq \max(q_{11b}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w1b};$$

$$e_{1,b-1} + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w1b}), \quad b = \overline{2, B + 1}, \quad l = \overline{2, L}, \quad (7)$$

$$q_{1jb}^l \geq \max(q_{1jb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb};$$

$$g_{j-1,b}^l + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{wjb}) - M \cdot (1 - u_{jb}), \quad (8)$$

$$j = \overline{2, J}, \quad b = \overline{1, B + 1}, \quad l = \overline{2, L},$$

$$q_{ijb}^l \geq \max(q_{ijb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb};$$

$$q_{i-1,j,b}^l + \sum_{w=1}^W t_{lw} y_{wjb}) - M \cdot (1 - x_{ijb}), \quad (9)$$

$$i = \overline{2, I}, \quad j = \overline{1, J}, \quad b = \overline{1, B + 1}, \quad l = \overline{2, L},$$

$$g_{jb}^l \leq s_{lb}, \quad l = \overline{1, L}, \quad b = \overline{1, B}, \quad j = \overline{1, J}. \quad (10)$$

В выражениях (1–10), представляющих собой ограничения модели оптимизации решений и позволяющих определять значения q_{ijb}^l и g_{jb}^l , учтено условие, что s_{lb} и e_{lb} являются левыми и правыми границами интервалов $[s_{lb}; e_{lb}]$ недоступности приборов, в течение которых реализуется их ПТО. То есть моменты времени начала и окончания ПТО приборов являются фиксированными, также, как являются фиксированными и интервалы доступности приборов.

В постановке задачи, решаемой в данной работе, значения s_{lb} и e_{lb} являются левыми и правыми границами временных интервалов (временных «окон»), в рамках которых оптимизируется положение ре-

лизаций ПТО приборов (в том числе этим рассматриваемая работа отличается от работы [2]). При этом начало рассматриваемых реализаций ПТО приборов смещено на k_{lb}^{pm} интервалов времени τ относительно левой границы s_{lb} рассматриваемого интервала $[s_{lb}; e_{lb}]$. Значения k_{lb}^{pm} для каждой b -й реализации ПТО каждого l -го прибора определяются в процессе оптимизации решений. Тогда значения левых границ интервалов недоступности l -х приборов, соответствующих моментам времени начала b -х реализаций их ПТО и моментам времени окончания b -х интервалов доступности приборов, определяются выражением $s_{lb} + k_{lb}^{pm}\tau$. Значения правых границ интервалов недоступности l -х приборов, соответствующих моментам времени окончания b -х реализаций их ПТО и моментам времени начала $(b + 1)$ -х интервалов доступности приборов, определяются выражением $s_{lb} + k_{lb}^{pm}\tau + t_l^{pm}$. Определение в процессе оптимизации решений значений k_{lb}^{pm} ($b = \overline{1, B}; l = \overline{1, L}$) осуществляется с учетом ограничения, предусматривающего, что моменты времени окончания b -х реализаций ПТО l -х приборов не превышают значений e_{lb} правых границ соответствующих временных интервалов $[s_{lb}; e_{lb}]$, в которых их (этих реализаций) положение оптимизируется. Указанное ограничение имеет следующий вид: $s_{lb} + k_{lb}^{pm}\tau + t_l^{pm} \leq e_{lb}$ ($b = \overline{1, B}; l = \overline{1, L}$).

В соответствии с выполненными рассуждениями модифицированы выражения (2, 7, 10), входящие в модель (1-10) и используемые для вычисления значений q_{11b}^1 ($b = \overline{2, B + 1}$), q_{11b}^l ($l = \overline{2, L}; b = \overline{2, B + 1}$) и g_{jb}^l ($j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B + 1}$).

Модификация выражений (2, 7, 10) осуществлена следующим образом. Окончание b -х реализаций ПТО ($l = 1$)-го прибора связано с границами e_{1b} интервалов $[s_{1b}; e_{1b}]$: $s_{1b} + k_{1b}^{pm}\tau + t_1^{pm} \leq e_{1b}$. Начало выполнения ($i = 1$)-х заданий в ($j = 1$)-х пакетах в b -х интервалах ($b = \overline{2, B + 1}$) доступности ($l = 1$)-го прибора возможно после его наладки на осуществление операций с заданиями w -го типа в этих пакетах, которая следует за окончанием ($b-1$)-х реализаций ПТО.

Для этих заданий значение q_{11b}^1 ($b = \overline{2, B + 1}$) определяется выражением вида:

$$q_{11b}^1 \geq s_{1,b-1} + k_{1,b-1}^{pm}\tau + t_1^{pm} + \sum_{w=1}^W p_{1w}y_{w1b}.$$

Начало b -х реализаций ПТО l -х приборов ($l = \overline{2, L}$) определяется выражением: $s_{lb} + k_{lb}^{pm}\tau$, окончание этих реализаций ПТО – выражением: $s_{lb} + k_{lb}^{pm}\tau + t_l^{pm}$, где k_{lb}^{pm} – переменная решения. Окончание b -х реализаций ПТО l -х приборов связано с границами e_{lb} интервалов $[s_{lb}; e_{lb}]$: $s_{lb} + k_{lb}^{pm}\tau + t_l^{pm} \leq e_{lb}$. Начало выполнения ($i = 1$)-х

заданий в ($j = 1$)-х пакетах в b -х интервалах доступности l -х приборов ($l = \overline{2, L}$) возможно после их наладки на осуществления операций с заданиями w -х типов, которая следует за окончанием ($b - 1$)-х реализаций ПТО приборов ($b = \overline{2, B + 1}$).

Тогда значения q_{11b}^l для ($i = 1$)-х заданий в ($j = 1$)-х пакетах в b -х интервалах доступности l -х приборов определяются выражением:

$$q_{11b}^l \geq \max (q_{11b}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w}y_{w1b}; (s_{l,b-1} + k_{l,b-1}^{pm}\tau + t_l^{pm}) + \sum_{w=1}^W p_{lw}y_{w1b}).$$

где $b = \overline{2, B + 1}, l = \overline{2, L}$.

Первая компонента операции \max аналогична такой же компоненте в выражении (7), вторая компонента определяет момент времени окончания наладки l -го прибора после завершения ($b - 1$)-й реализации его ПТО.

Для значений g_{jb}^l ограничения (5) модифицированы следующим образом: $g_{jb}^l \leq s_{lb} + k_{lb}^{pm}\tau$ ($b = \overline{1, B}$). Модификация ограничений (5) предусматривает, что ПЗ должны быть выполнены строго в b -е интервалы доступности l -х приборов, окончание которых определяется выражением $s_{lb} + k_{lb}^{pm}\tau$. Вместе с тем моменты времени окончания выполнения ПЗ в $(B + 1)$ -х интервалах доступности l -х приборов ($l = \overline{1, L}$) превышают момент времени окончания B -й реализации их ПТО: $g_{j,B+1}^l \geq s_{lB} + k_{lB}^{pm}\tau + t_l^{pm}$ ($j = \overline{1, J}; l = \overline{1, L}$).

С целью введения ограничений, определяющих требование распределения по пакетам всех заданий w -х типов ($w = \overline{1, W}$) в количестве n_{wk} , включенных в k -е заказы ($k = \overline{1, K}$), введены индикаторные переменные. То есть в пакеты, включаемые под j -ми номерами в b -е интервалы доступности l -х приборов, требуется распределять все n_{wk} заданий w -х типов ($w = \overline{1, W}$), входящих в k -е заказы ($k = \overline{1, K}$). Для построения ограничений, соответствующих выполнению этого условия, введены индикаторные переменные v_{ijbkw} ($i = \overline{1, I}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B + 1}; w = \overline{1, W}; k = \overline{1, K}$). В том случае, если задание назначено под i -м номером в пакет, включенный под j -м номером в b -й интервал доступности приборов ($x_{ijb} = 1$), в этот j -й пакет в b -м интервале доступности назначены задания w -го типа ($y_{wjb} = 1$), при этом задания w -го типа включены в k -й заказ ($r_{wk} = 1$), то $v_{ijbkw} = 1$.

Таким образом, если $x_{ijb}y_{wjb}r_{wk} = 1$ (i -е задание из пакета, включенного под j -м номером в b -й интервал доступности приборов, относится к w -у

типу заданий из k -го заказа), то $v_{ijbwk} = 1$. Если $x_{ijb}y_{wjb}r_{wk} = 0$ (i -е задание из пакета, включенного под j -м номером в b -й интервал доступности l -го прибора, не относится к w -у типу либо не соответствует типу заданий, включенных в k -й заказ), то $v_{ijbwk} = 0$.

Сформирован способ идентификации значений индикаторной переменной y , соответствующих выполнению / не выполнению ограничений вида $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b$. Полученные выражения, позволяющие определять значения y , имеют вид:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq b - M \cdot (1 - y), \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b - 1 + My. \end{aligned} \quad (11)$$

Для условий: 1) $v_{ijbwk} = 1$, когда $x_{ijb}y_{wjb}r_{wk} = 1$, 2) $v_{ijbwk} = 0$, когда $x_{ijb}y_{wjb}r_{wk} = 0$, ограничения, используемые для определения значений индикаторных переменных v_{ijbwk} , получены на основе (11) в виде:

$$\begin{aligned} x_{ijb}y_{wjb}r_{wk} &\geq 1 - M \cdot (1 - v_{ijbwk}), \\ x_{ijb}y_{wjb}r_{wk} &\leq Mv_{ijbwk}, \end{aligned}$$

где $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J}$, $b = \overline{1, B + 1}$, $w = \overline{1, W}$, $k = \overline{1, K}$.

Тогда ограничения, определяющие требование включения в состав пакетов всех заданий w -х типов из k -х заказов в количестве n_{wk} , имеют вид:

$$\sum_{b=1}^{B+1} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I v_{ijbwk} = n_{wk},$$

где $w = \overline{1, W}$, $k = \overline{1, K}$.

Момент времени окончания исполнения k -х заказов определяется как максимум среди моментов времени окончания операций со всеми зданиями w -х типов, входящими в эти заказы.

Для вычисления g_k получено выражение:

$$\begin{aligned} g_k &\geq \left(q_{ijb}^L + \sum_{w=1}^W t_{Lw}y_{wjb} \right) - M \cdot \left(1 - \sum_{w=1}^W v_{ijbwk} \right), \\ i &= \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}, \quad b = \overline{1, B + 1}, \quad k = \overline{1, K}, \end{aligned}$$

где выражение $(q_{ijb}^L + \sum_{w=1}^W t_{Lw}y_{wjb})$ позволяет вычислить значения моментов времени окончания выполнения i -х заданий из j -х пакетов, включенных в b -е интервал доступности L -го прибора, а выражение $M \cdot (1 - \sum_{w=1}^W v_{ijbwk})$ – осуществлять вычисления только для заданий w -х типов, включенных в k -й заказ. Запоздывание p_k с окончанием исполнения k -х заказов относительно заданных для них директивных сроков определяется выражением: $p_k \geq \max(0, g_k - d_k)$ ($k = \overline{1, K}$), где d_k – значения директивных сроков окончания исполнения k -х заказов. Критерий оптимизации решений представляет собой сумму запоздываний с исполнением k -х

заказов, которая минимизируется. В этом случае критерий оптимизации решений рассматриваемого вида имеет вид $f = \sum_{k=1}^K p_k$. Учет в разрабатываемой модели MILP условия включения результатов выполнения заданий, распределенных по пакетам, в заказы, для которых заданы директивные сроки окончания исполнения, обуславливает ее отличие от модели, рассмотренной в [2], и тем самым ее новизну.

Включение пакетов в b -е интервалы доступности l -х приборов предполагает следующие ограничения:

1) задания с i -и номерами могут быть распределены в пакеты в том случае, если пакеты под j -ми номерами включены в b -е интервалы доступности:

$$\sum_{i=1}^I x_{ijb} \leq Mu_{jb},$$

где $j = \overline{1, J}$, $b = \overline{1, B + 1}$;

2) в j -е пакеты, включенные в b -е интервалы доступности l -х приборов, должно быть распределено не менее двух заданий:

$$\sum_{i=1}^I x_{ijb} \geq 2 - M \cdot (1 - u_{jb}),$$

где $j = \overline{1, J}$, $b = \overline{1, B + 1}$;

3) в следующие друг за другом пакеты, включенные в b -е интервалы доступности l -х приборов, распределены задания разных типов:

$$y_{wjb} + y_{w,j+1,b} \leq 1,$$

где $j = \overline{1, J - 1}$, $w = \overline{1, W}$, $b = \overline{1, B + 1}$;

4) в каждом b -м интервале доступности размещается не менее одного ПЗ:

$$\sum_{j=1}^J u_{jb} \geq 1,$$

где $b = \overline{1, B + 1}$;

5) пакет, включенный под j -м номером в b -й интервал доступности l -х приборов, может содержать задания одного w -го типа и задания могут быть добавлены в пакет только в случае, если он включен в этот интервал:

$$\sum_{w=1}^W y_{wjb} = u_{jb},$$

где $j = \overline{1, J}$, $b = \overline{1, B + 1}$.

Также формирование ограничений на включение заданий под i -ми номерами в пакеты, размещаемые с j -ми идентификаторами в b -х интервалах доступности l -х приборов, осуществляется с использованием подхода, основывающегося на логических условиях [34].

Первое логическое условие: если задание содержится под $(i + 1)$ -м номером в пакете, включенном

под j -м номером в b -й интервал доступности l -х приборов ($x_{i+1,jb} = 1$), то в этом же пакете должно содержаться задание с i -м номером ($x_{ijb} = 1$).

Вид логического условия:

$$\text{ЕСЛИ } x_{i+1,jb} = 1, \text{ ТО } x_{ijb} = 1,$$

где $i = \overline{1, I-1}$, $j = \overline{1, J}$, $b = \overline{1, B+1}$.

Форма ограничений для этого условия:

$$x_{ijb} - x_{i+1,jb} \geq 0.$$

Аналогично сформированы ограничения по включению в b -е интервалы доступности двух идущих подряд пакетов:

$$u_{jb} - u_{j+1,b} \geq 0,$$

где $j = \overline{1, J-1}$, $b = \overline{1, B+1}$.

В соответствии с выполненными рассуждениями, сформирована новая математическая модель оптимизации назначения заданий в составы пакетов, включения пакетов в b -е интервалы доступности приборов не фиксированной длительности, размещения реализаций ПТО приборов в заданных временных интервалах (временных «окнах») при исполнении заказов в заданные сроки.

Вид полученной модели следующий:

1) критерий оптимизации решений:

$$f = \sum_{k=1}^K p_k; \quad (12)$$

2) ограничения:

$$\sum_{i=1}^I x_{ijb} \geq 2 - M \cdot (1 - u_{jb}), \quad (13)$$

$$b = \overline{1, B+1}, j = \overline{1, J};$$

$$\sum_{i=1}^I x_{ijb} \leq M u_{jb}, \quad b = \overline{1, B+1}, j = \overline{1, J}; \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^J u_{jb} \geq 1, \quad b = \overline{1, B+1}; \quad (15)$$

$$\sum_{w=1}^W y_{wjb} = u_{jb}, \quad b = \overline{1, B+1}, j = \overline{1, J}; \quad (16)$$

$$y_{wjb} + y_{w,j+1,b} \leq 1, \quad (17)$$

$$b = \overline{1, B+1}, j = \overline{1, J-1}, w = \overline{1, W};$$

$$x_{ijb} - x_{i+1,jb} \geq 0, \quad (18)$$

$$i = \overline{1, I-1}, j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B+1}$$

$$u_{jb} - u_{j+1,b} \geq 0, \quad j = \overline{1, J-1}, b = \overline{1, B+1}; \quad (19)$$

$$x_{ijb} y_{wjb} r_{wk} \geq 1 - M \cdot (1 - v_{ijbkw}), \quad (20)$$

$$x_{ijb} y_{wjb} r_{wk} \leq M v_{ijbkw}, \quad i = \overline{1, I},$$

$$j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B+1}, w = \overline{1, W}, k = \overline{1, K}$$

$$\sum_{b=1}^{B+1} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I v_{ijbkw} = n_{wk}, \quad w = \overline{1, W}, k = \overline{1, K}; \quad (21)$$

$$q_{111}^1 \geq \sum_{w=1}^W p_{1w} y_{w11}; \quad (22)$$

$$q_{11b}^1 \geq s_{1,b-1} + k_{1,b-1}^{pm} \tau + t_1^{pm} + \sum_{w=1}^W p_{1w} y_{w1b}, \quad (23)$$

$$b = \overline{2, B+1};$$

$$q_{1jb}^1 \geq g_{j-1,b}^1 + \sum_{w=1}^W p_{1w} y_{w1b} - M \cdot (1 - u_{jb}), \quad (24)$$

$$j = \overline{2, J}, b = \overline{1, B+1};$$

$$q_{ijb}^1 \geq q_{i-1,jb}^1 + \sum_{w=1}^W t_{1w} y_{wjb} - M \cdot (1 - x_{ijb}), \quad (25)$$

$$i = \overline{2, I}, j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B+1};$$

$$g_{jb}^l \geq q_{ijb}^l + \sum_{w=1}^W t_{lw} y_{wjb} - M \cdot (2 - u_{jb} - x_{ijb}), \quad (26)$$

$$i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B+1}, l = \overline{1, L};$$

$$q_{111}^l \geq \max(q_{111}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w11}; \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w11}), \quad (27)$$

$$l = \overline{2, L};$$

$$q_{11b}^l \geq \max(q_{11b}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w1b}, \quad (28)$$

$$(s_{l,b-1} + k_{l,b-1}^{pm} \tau + t_l^{pm}) + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w1b}),$$

$$b = \overline{2, B+1}, l = \overline{2, L}$$

$$q_{1jb}^l \geq \max(q_{1jb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb}; \quad (29)$$

$$g_{j-1,b}^l + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{wjb}) - M \cdot (1 - u_{jb}),$$

$$j = \overline{2, J}, l = \overline{2, L};$$

$$q_{ijb}^l \geq \max(q_{ijb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb}, \quad (30)$$

$$q_{i-1,jb}^l + \sum_{w=1}^W t_{lw} y_{wjb}) - M \cdot (1 - x_{ijb}),$$

$$i = \overline{2, I}, j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B+1}, l = \overline{2, L};$$

$$g_k \geq \left(q_{ijb}^l + \sum_{w=1}^W t_{Lw} y_{wjb} \right) - M \times \left(1 - \sum_{w=1}^W v_{ijbwk} \right), \quad (31)$$

$$i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B+1}, k = \overline{1, K};$$

$$p_k \geq \max(0, g_k - d_k), \quad k = \overline{1, K}; \quad (32)$$

$$s_{lb} + k_{lb}^{pm} \tau + t_l^{pm} \leq e_{lb}, \quad b = \overline{1, B}; \quad (33)$$

$$g_{jb}^l \leq s_{lb} + k_{lb}^{pm} \tau, \quad b = \overline{1, B}; \quad (34)$$

$$g_{j, B+1}^l \geq s_{l, B} + k_{l, B}^{pm} \tau + t_l^{pm}, \quad j = \overline{1, J}, l = \overline{1, L}; \quad (35)$$

$$g_k \geq 0, \quad k = \overline{1, K}, k_{lb}^{pm} \geq 0, l = \overline{1, L}, b = \overline{1, B}; \quad (36)$$

$$q_{ijb}^l \geq 0, \quad g_{jb}^l \geq 0, \quad (37)$$

$$i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B+1}, l = \overline{1, L};$$

$$x_{ijb} \in \{0, 1\}, y_{wjb} \in \{0, 1\}, u_{jb} \in \{0, 1\},$$

$$v_{ijbwk}^l \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, \quad (38)$$

$$b = \overline{1, B+1}, w = \overline{1, W}, k = \overline{1, K}$$

Линеаризация модели оптимизации составов и расписаний выполнения пакетов заданий в системе Flow Shop при изменяющейся периодичности обслуживания приборов

Модель (12–38) является нелинейной. Нелинейными являются выражения (20, 27–30, 32). Для линеаризации ограничений (20) в рассмотрение введены переменные z_{ijbw} : $z_{ijbw} = x_{ijb} y_{wjb}$ ($i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B+1}, w = \overline{1, W}$) и соответствующие ограничения, обеспечивающие корректность замены [35]:

$$z_{ijbw} \leq y_{wjb}, \quad z_{ijbw} \leq x_{ijb}, \quad z_{ijbw} \geq y_{wjb} + x_{ijb} - 1, \quad z_{ijbw} \in \{0, 1\}.$$

С целью линеаризации (27) введены индикаторные переменные m_l ($l = \overline{2, L}$), интерпретация которых аналогична [2], и дополнительные ограничения, которые аналогичны базовой модели [2, ограничения (27–30), стр. 17], обеспечивающие корректность введения в модель этих переменных.

Для линеаризации (28) введены переменные m_b^l ($l = \overline{2, L}, b = \overline{2, B+1}$) и следующие дополнительные ограничения, обеспечивающие корректность введения в модель этих переменных:

$$\begin{aligned} & [((s_{l, b-1} + k_{l, b-1}^{pm} \tau + t_l^{pm}) + \\ & + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w1b}) - (q_{11b}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w1b})] + M m_b^l \geq 0, \\ & [(q_{11b}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w1b})] - ((s_{l, b-1} + k_{l, b-1}^{pm} \tau + t_l^{pm}) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w1b})] + M \cdot (1 - m_b^l) \geq 0,$$

$$q_{11b}^l \geq (q_{11b}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w1b}) - M \cdot (1 - m_b^l),$$

$$q_{11b}^l \geq ((s_{l, b-1} + k_{l, b-1}^{pm} \tau + t_l^{pm}) + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w1b}) - M m_b^l.$$

Для линеаризации (29) введены индикаторные переменные m_{jb}^l ($j = \overline{2, J}, b = \overline{1, B+1}, l = \overline{2, L}$), интерпретация которых аналогична [2], и дополнительные ограничения, которые аналогичны базовой модели [2, ограничения (35–38), стр. 17].

Для линеаризации (30) в рассмотрение введены индикаторные переменные m_{ijb}^l ($i = \overline{2, I}, j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}, l = \overline{2, L}$), интерпретация которых аналогична [2], и дополнительные ограничения, которые аналогичны базовой модели [2, ограничения (39–42), стр. 17], обеспечивающие корректность введения в модель этих переменных.

Для линеаризации выражений (32) введены переменные $z1_k$ ($k = \overline{1, K}$) и дополнительные ограничения:

$$\begin{aligned} & (d_k - g_k) + M z1_k \geq 0, \\ & (g_k - d_k) + M(1 - z1_k) \geq 0, \\ & p_k \geq (g_k - d_k) - M(1 - z1_k), \\ & p_k \geq -M z1_k. \end{aligned}$$

Итоговый вид модели MILP оптимизации решений по назначению заданий в пакеты, включению пакетов в интервалы доступности приборов, порядков выполнения ПЗ в интервалах доступности приборов, размещению реализаций ПТО приборов в рамках заданных временных интервалов при учете исполнения заказов в заданные директивные сроки:

1) критерий оптимизации решений:

$$f = \sum_{k=1}^K p_k; \quad (39)$$

2) ограничения:

$$\sum_{i=1}^I x_{ijb} \geq 2 - M \cdot (1 - u_{jb}), \quad (40)$$

$$b = \overline{1, B+1}, j = \overline{1, J};$$

$$\sum_{i=1}^I x_{ijb} \leq M u_{jb}, \quad b = \overline{1, B+1}, j = \overline{1, J}; \quad (41)$$

$$\sum_{j=1}^J u_{jb} \geq 1, \quad b = \overline{1, B+1}; \quad (42)$$

$$\sum_{w=1}^W y_{wjb} = u_{jb}, \quad b = \overline{1, B+1}, j = \overline{1, J}; \quad (43)$$

$$y_{wjb} + y_{w, j+1, b} \leq 1, \quad b = \overline{1, B+1}, j = \overline{1, J-1}, w = \overline{1, W}; \quad (44)$$

$$x_{ijb} - x_{i+1, jb} \geq 0, \quad i = \overline{1, I-1}, j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B+1} \quad (45)$$

$$u_{jb} - u_{j+1, b} \geq 0, \quad j = \overline{1, J-1}, b = \overline{1, B+1}; \quad (46)$$

$$z_{ijb_w} r_{wk} \geq 1 - M \cdot (1 - v_{ijbwk})$$

$$z_{ijb_w} r_{wk} \leq M v_{ijbwk}, \quad i = \overline{1, I}, \quad (47)$$

$$j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B+1}, w = \overline{1, W}, k = \overline{1, K}$$

$$\sum_{b=1}^{B+1} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I v_{ijbwk} = n_{wk}, \quad w = \overline{1, W}, k = \overline{1, K}; \quad (48)$$

$$z_{ijbw} \leq y_{wjb}, \quad z_{ijbw} \leq x_{ijb},$$

$$z_{ijbw} \geq y_{wjb} + x_{ijb} - 1; \quad (49)$$

$$q_{111}^1 \geq \sum_{w=1}^W p_{1w} y_{w11}; \quad (50)$$

$$q_{11b}^1 \geq s_{1, b-1} + k_{1, b-1}^{pm} \tau + t_1^{pm} + \sum_{w=1}^W p_{1w} y_{w1b}, \quad (51)$$

$$b = \overline{2, B+1};$$

$$q_{1jb}^1 \geq g_{j-1, b}^1 + \sum_{w=1}^W p_{1w} y_{w1b} - M \cdot (1 - u_{jb}), \quad (52)$$

$$j = \overline{2, J}, b = \overline{1, B+1};$$

$$q_{ijb}^1 \geq q_{i-1, j, b}^1 + \sum_{w=1}^W t_{1w} y_{wjb} - M \cdot (1 - x_{ijb}), \quad (53)$$

$$i = \overline{2, I}, j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B+1};$$

$$g_{jb}^1 \geq q_{ijb}^1 + \sum_{w=1}^W t_{lw} y_{wjb} - M \cdot (2 - u_{jb} - x_{ijb}), \quad (54)$$

$$i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B+1}, l = \overline{1, L};$$

$$[\sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w11} - (q_{111}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w11})] + M m_l \geq 0, \quad (55)$$

$$l = \overline{2, L};$$

$$[(q_{111}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w11})] - \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w11} +$$

$$+ M(1 - m_l) \geq 0, \quad l = \overline{2, L}; \quad (56)$$

$$q_{111}^l \geq (q_{111}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w11}) - M \cdot (1 - m_l), \quad (57)$$

$$l = \overline{2, L};$$

$$q_{111}^l \geq \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w11} - M m_l, \quad l = \overline{2, L}; \quad (58)$$

$$[(s_{l, b-1} + k_{l, b-1}^{pm} \tau + t_l^{pm}) + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w1b}] -$$

$$- (q_{11b}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w1b}) + M m_b^l \geq 0, \quad (59)$$

$$b = \overline{2, B}, l = \overline{2, L};$$

$$[(q_{11b}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w1b})] -$$

$$- ((s_{l, b-1} + k_{l, b-1}^{pm} \tau + t_l^{pm}) + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w1b}) +$$

$$+ M \cdot (1 - m_b^l) \geq 0, \quad b = \overline{2, B+1}, l = \overline{2, L}; \quad (60)$$

$$q_{11b}^l \geq (q_{11b}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w1b}) - M \cdot (1 - m_b^l), \quad (61)$$

$$b = \overline{2, B+1}, l = \overline{2, L};$$

$$q_{11b}^l \geq ((s_{l, b-1} + k_{l, b-1}^{pm} \tau + t_l^{pm}) +$$

$$+ \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w1b}) - M m_b^l, \quad b = \overline{2, B+1}, l = \overline{2, L}; \quad (62)$$

$$[(g_{j-1, b}^l + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{wjb}) -$$

$$- (q_{1jb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb})] + M m_{jb}^l \geq 0, \quad (63)$$

$$j = \overline{2, J}, b = \overline{1, B+1}, l = \overline{2, L}.$$

$$[(q_{1jb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb}) -$$

$$- (g_{j-1, b}^l + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{wjb})] + M(1 - m_{jb}^l) \geq 0, \quad (64)$$

$$j = \overline{2, J}, b = \overline{1, B+1}, l = \overline{2, L}.$$

$$q_{1jb}^l \geq (q_{1jb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb}) -$$

$$- M \cdot (2 - u_{jb} - m_{jb}^l), \quad (65)$$

$$j = \overline{2, J}, b = \overline{1, B+1}, l = \overline{2, L};$$

$$q_{1jb}^l \geq (g_{j-1, b}^l + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{wjb}) -$$

$$- M \cdot (1 - u_{jb} + m_{jb}^l), \quad (66)$$

$$j = \overline{2, J}, b = \overline{1, B+1}, l = \overline{2, L};$$

$$[(q_{i-1,j,b}^l + \sum_{w=1}^W t_{lw} y_{wjb}) - (q_{ijb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb})] + M m_{ijb}^l \geq 0, \quad (67)$$

$$i = \overline{2, I}, j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B+1}, l = \overline{2, L};$$

$$[(q_{ijb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb}) - (q_{i-1,j,b}^l + \sum_{w=1}^W t_{lw} y_{wjb})] + M(1 - m_{ijb}^l) \geq 0 \quad (68)$$

$$i = \overline{2, I}, j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B+1}, l = \overline{2, L};$$

$$q_{ijb}^l \geq (q_{ijb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb}) - M \cdot (2 - x_{ijb} - m_{ijb}^l), \quad (69)$$

$$i = \overline{2, I}, j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B+1}, l = \overline{2, L};$$

$$q_{ijb}^l \geq (q_{i-1,j,b}^l + \sum_{w=1}^W t_{lw} y_{wjb}) - M \cdot (1 - x_{ijb} + m_{ijb}^l), \quad (70)$$

$$i = \overline{2, I}, j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B+1}, l = \overline{2, L};$$

$$g_k \geq \left(q_{ijb}^l + \sum_{w=1}^W t_{Lw} y_{wjb} \right) - M \cdot \left(1 - \sum_{w=1}^W v_{ijbwk} \right), \quad (71)$$

$$i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B+1}, k = \overline{1, K};$$

$$(d_k - g_k) + M z_{1k} \geq 0, \quad (72)$$

$$(g_k - d_k) + M(1 - z_{1k}) \geq 0;$$

$$p_k \geq (g_k - d_k) - M(1 - z_{1k}), \quad (73)$$

$$p_k \geq -M z_{1k}, \quad k = \overline{1, K};$$

$$s_{lb} + k_{lb}^{pm} \tau + t_l^{pm} \leq e_{lb}, \quad l = \overline{1, L}, b = \overline{1, B}; \quad (74)$$

$$g_{jb}^l \leq s_{lb} + k_{lb}^{pm} \tau, \quad j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B}, l = \overline{1, L}; \quad (75)$$

$$g_{j,B+1}^l \geq s_{lb} + k_{lb}^{pm} \tau + t_l^{pm}, \quad j = \overline{1, J}, l = \overline{1, L}; \quad (76)$$

$$g_k \geq 0, \quad k = \overline{1, K}, k_{lb}^{pm} \geq 0, \quad l = \overline{1, L}, b = \overline{1, B}; \quad (77)$$

$$q_{ijb}^l \geq 0; \quad g_{jb}^l \geq 0; \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}, \quad b = \overline{1, B+1}, \quad l = \overline{1, L}; \quad (78)$$

$$x_{ijb} \in \{0,1\}, \quad y_{wjb} \in \{0,1\}, \quad u_{jb} \in \{0,1\}, \quad v_{ijbwk} \in \{0,1\}; \quad (79)$$

$$z_{ijbw} \in \{0,1\}, \quad z_{1k} \in \{0,1\}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}, \quad b = \overline{1, B+1}, \quad w = \overline{1, W}, \quad k = \overline{1, K}, \quad l = \overline{1, L}; \quad (80)$$

$$m_l \in \{0,1\}, \quad m_b^l \in \{0,1\}, \quad m_{jb}^l \in \{0,1\}; \quad (81)$$

$$j = \overline{2, J}, \quad b = \overline{1, B+1}, \quad l = \overline{2, L};$$

$$m_{ijb}^l \in \{0,1\}, \quad i = \overline{2, I}, \quad j = \overline{1, J}, \quad b = \overline{1, B+1}, \quad l = \overline{2, L}. \quad (82)$$

Исследование применения модели оптимизации составов и расписаний выполнения пакетов заданий в системе Flow Shop при изменяющейся периодичности обслуживания приборов

Для исследования предложенной модели MILP (39–82) разработано приложение в пакете IBM ILOG CPLEX. Исследование модели проведено путем решения задач поиска оптимальных решений по составам ПЗ, включению сформированных пакетов в интервалы доступности l -х приборов, по порядкам пакетов для проведения операций с ними на приборах КС в рамках этих интервалов, а также оптимизации интервалов доступности приборов (определения положения реализаций ПТО приборов в рамках временных «окон»). Исследования проводились для параметров модели, которые обобщены в виде отношений:

1) времени осуществления операций с заданиями i -го и i' -го типов на l -х приборах – отношение $\max(t_{li})/\min(t_{li'})$;

2) времени наладки приборов на осуществления операций с заданиями i -го и i' -го типов на l -х приборах – отношение $\max(p_{lw})/\min(p_{lw'})$.

Задано, что:

– $\max(p_{lw})/\min(p_{lw'}) \in \{1,2,4,8\}$;

– $\max(t_{li})/\min(t_{li'}) \in \{1,2,4\}$;

– значения $\min(t_{li}) = 2, \min(p_{lw}) = 2$;

– значения $W = 4$ и $K = 2$, а также $L = 2, B = 1$ и $B = 2$.

Для $L = 2, B = 1$ исследования проводились при $n_{wk} = 10$ ($w = \overline{1, W}$) и при $n_{wk} = 12$ ($w = \overline{1, W}$). Выполняется условие $\sum_{k=1}^K r_{wk} = 1$ ($w = \overline{1, W}$). Определены два варианта интервалов времени $[s_{lb}; e_{lb}]$ ($l = \overline{1, L}; b = \overline{1, B}$), в которых путем определения значений переменных k_{lb}^{pm} ($l = \overline{1, L}; b = \overline{1, B}$) оптимизируются местоположения ПТО приборов:

1) при $L = 2, B = 1, n_{wk} = 10$ ($w = \overline{1, W}$) варианту 1 соответствуют длительности интервалов времени, внутри которых определяются положения ПТО приборов (длительности временных «окон»), равные 20, варианту 2 – длительности интервалов времени, внутри которых определяются положения ПТО приборов, равные 30;

2) при $L = 2, B = 2, n_{wk} = 12$ ($w = \overline{1, W}$) варианту 1 соответствуют длительности интервалов времени, внутри которых определяются положения ПТО приборов, равные 15, варианту 2 – длительности интервалов времени, внутри которых определяется положение ПТО приборов, равные 25.

Длительность параметра τ (шага изменения положения ПТО внутри заданных временных интервалов $[s_{lb}; e_{lb}]$ ($l = \overline{1,2}; b = \overline{1, B}$)) равна 2. Длительность ПТО l -х приборов: $t_l^{pm} = 7$ ($l = \overline{1,2}$).

В качестве результатов зафиксированы значения критерия f , соответствующие суммарным запаздываниям с исполнением заказов относительно заданных для них директивных сроков, а также значения переменных k_{lb}^{pm} решения задачи, определяющие

количество интервалов τ , соответствующее изменению положения начала реализаций ПТО приборов относительно левых границ s_{lb} временных «окон» $[s_{lb}; e_{lb}]$. Значения параметров, используемые в исследованиях при $L = 2$ и $B = 1$ и при $L = 2$ и $B = 2$, и результаты представлены в таблице 2. На рисунке 1 вариант 1 соответствует размеру временных «окон», равным 20; вариант 2 –30. На рисунке 2 вариант 1 соответствует размерам временных «окон», равным 15, вариант 2 –25.

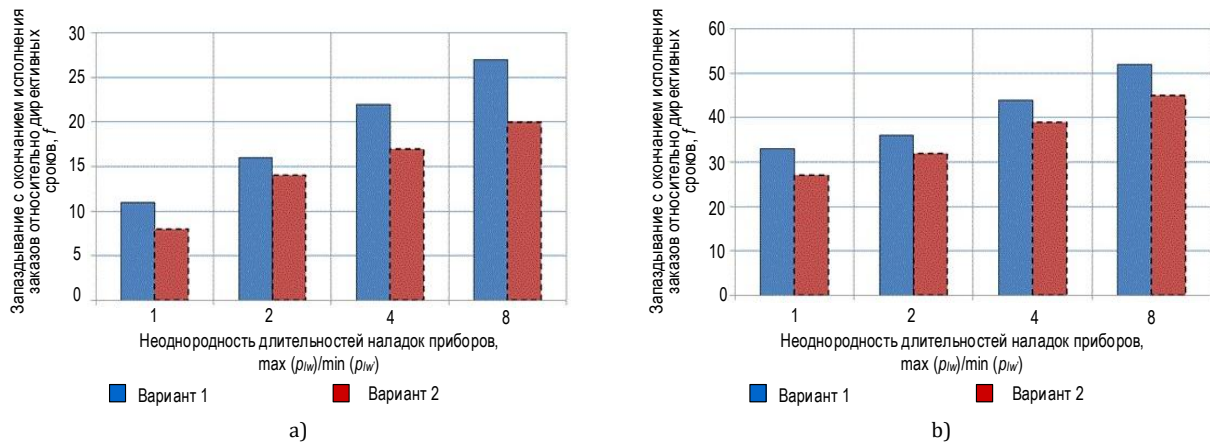


Рис. 1. Зависимости значений запаздываний (критерия f) от значений отношения $\max(p_{lw})/\min(p_{lw})$ для параметров модели $L = 2; B = 1; J = 5; I = 6; W = 4, K = 2, n_{wk} = 10$ (вариант 1), $n_{wk} = 12$ (вариант 2): а) $\max(t_{ii})/\min(t_{ii}) = 1$; б) $\max(t_{ii})/\min(t_{ii}) = 2$

Fig. 1. Dependences of the Delay Values (Criterion f) on the Values of the Ratio $\max(p_{lw})/\min(p_{lw})$ for the Model Parameters $L = 2; B = 1; J = 5; I = 6; W = 4, K = 2, n_{wk} = 10$ (Option 1), $n_{wk} = 12$ (Option 2): а) $\max(t_{ii})/\min(t_{ii}) = 1$; б) $\max(t_{ii})/\min(t_{ii}) = 2$

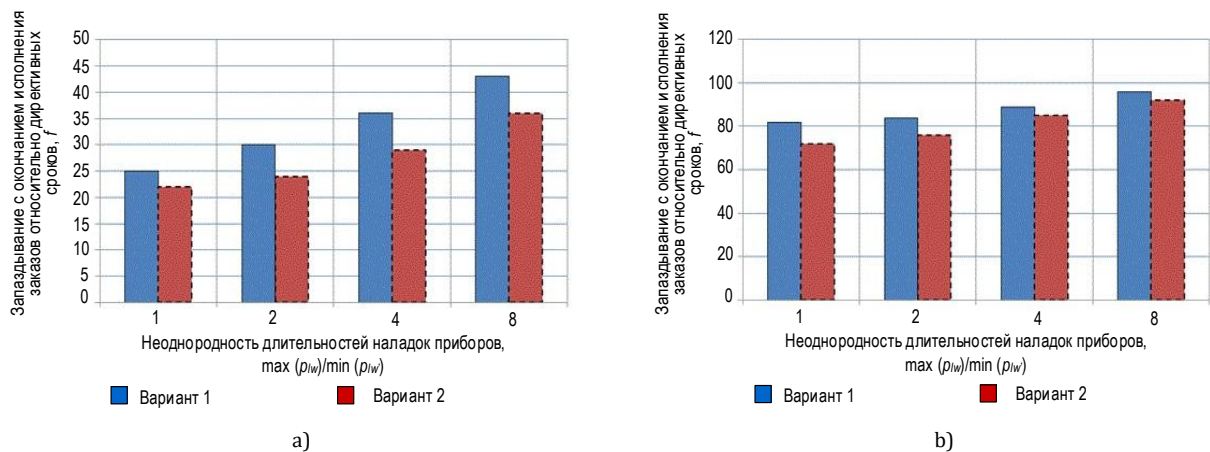


Рис. 2. Зависимости значений запаздываний (критерия f) от значений отношения $\max(p_{lw})/\min(p_{lw})$ для параметров модели $L = 2; B = 2; J = 4; I = 5; W = 4, K = 2, n_{wk} = 10$ (вариант 1), $n_{wk} = 12$ (вариант 2): а) $\max(t_{ii})/\min(t_{ii}) = 1$; б) $\max(t_{ii})/\min(t_{ii}) = 2$

Fig. 1. Dependences of the Delay Values (Criterion f) on the Values of the Ratio $\max(p_{lw})/\min(p_{lw})$ for the Model Parameters $L = 2; B = 2; J = 45; I = 5; W = 4, K = 2, n_{wk} = 10$ (Option 1), $n_{wk} = 12$ (Option 2): а) $\max(t_{ii})/\min(t_{ii}) = 1$; б) $\max(t_{ii})/\min(t_{ii}) = 2$

ТАБЛИЦА 2. Результаты исследований модели при $L = 2, B = 1$, а также при $L = 2, B = 2$ TABLE 2. The Results of the Model Studies at $L = 2, B = 1$, as Well as at $L = 2, B = 2$

| $\max(p_{lw})$ $\min(p_{lw})$ | $\max(t_{lv})$ $\min(t_{lv})$ | Интервалы времени, в которых определяется положение реализации ПТО | | Решение по размещению ПТО во временных интервалах – значения k_{l1}^{pm} ($l = 1, 2$) | Значение критерия f | Интервалы времени, в которых определяется положение реализации ПТО | | Решение по размещению ПТО во временных интервалах – значения k_{lb}^{pm} ($l = 1, 2; b = 1, 2$) | Значение критерия f |
|---|----------------------------------|--|--|---|---|--|--|---|-----------------------|
| | | ($l = 1$)-го прибора $[s_{11}; e_{11}]$ | ($l = 2$)-го прибора $[s_{21}; e_{21}]$ | | | ($l = 1$)-го прибора $[s_{1b}; e_{1b}]$ | ($l = 2$)-го прибора $[s_{2b}; e_{2b}]$ | | |
| $L = 2, B = 1, J = 5, I = 6, W = 4, K = 2, n_{wk} = 10$ | | | | | $L = 2, B = 2, J = 4, I = 5, W = 4, K = 2, n_{wk} = 10$ | | | | |
| ВАРИАНТ 1 | | | | | | | | | |
| 1 | $d_1 = 80; d_2 = 80$ | | | | $d_1 = 90; d_2 = 100$ | | | | |
| | 1 | [55;75] | [60;80] | $k_{11}^{pm} = 2, k_{21}^{pm} = 2$ | 11 | [35;50]; [75;90] | [45;60]; [80;95] | $k_{11}^{pm} = 3, k_{12}^{pm} = 0$ $k_{21}^{pm} = 0, k_{22}^{pm} = 0$ | 25 |
| | $d_1 = 90; d_2 = 100$ | | | | $d_1 = 100; d_2 = 110$ | | | | |
| | 2 | [65;85] | [70;90] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{21}^{pm} = 3$ | 16 | [40;55]; [80;95] | [50;65]; [85;100] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{12}^{pm} = 3$ $k_{21}^{pm} = 0, k_{22}^{pm} = 2$ | 30 |
| | $d_1 = 100; d_2 = 110$ | | | | $d_1 = 120; d_2 = 130$ | | | | |
| | 4 | [75;95] | [80;100] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{21}^{pm} = 0$ | 22 | [50;65]; [90;105] | [60;75]; [95;110] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{12}^{pm} = 1$ $k_{21}^{pm} = 0, k_{22}^{pm} = 0$ | 36 |
| 8 | [85;105] | [90;110] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{21}^{pm} = 1$ | 27 | [60;75]; [100;115] | [70;85]; [105;120] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{12}^{pm} = 3$ $k_{21}^{pm} = 0, k_{22}^{pm} = 0$ | 43 | |
| 2 | $d_1 = 110; d_2 = 120$ | | | | $d_1 = 110; d_2 = 120$ | | | | |
| | 1 | [65;85] | [75;95] | $k_{11}^{pm} = 1, k_{21}^{pm} = 2$ | 33 | [45;60]; [100;115] | [55;70]; [110;125] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{12}^{pm} = 0$ $k_{21}^{pm} = 2, k_{22}^{pm} = 4$ | 82 |
| | 2 | [75;95] | [85;105] | $k_{11}^{pm} = 1, k_{21}^{pm} = 6$ | 36 | [55;70]; [110;125] | [65;80]; [120;135] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{12}^{pm} = 0$ $k_{21}^{pm} = 3, k_{22}^{pm} = 4$ | 84 |
| | $d_1 = 120; d_2 = 130$ | | | | $d_1 = 120; d_2 = 130$ | | | | |
| | 4 | [85;105] | [95;115] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{21}^{pm} = 2$ | 44 | [65;80]; [120;135] | [75;90]; [130;145] | $k_{11}^{pm} = 3, k_{12}^{pm} = 4$ $k_{21}^{pm} = 0, k_{22}^{pm} = 0$ | 89 |
| 8 | [95;115] | [105;125] | $k_{11}^{pm} = 1, k_{21}^{pm} = 3$ | 52 | [75;90]; [130;145] | [85;100]; [140;155] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{12}^{pm} = 3$ $k_{21}^{pm} = 0, k_{22}^{pm} = 0$ | 96 | |
| 4 | $d_1 = 140; d_2 = 150$ | | | | $d_1 = 190; d_2 = 220$ | | | | |
| | 1 | [115;135] | [125;145] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{21}^{pm} = 4$ | 116 | [70;85]; [160;175] | [80;95]; [170;185] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{12}^{pm} = 2$ $k_{21}^{pm} = 1, k_{22}^{pm} = 4$ | 108 |
| | $d_1 = 200; d_2 = 230$ | | | | $d_1 = 200; d_2 = 230$ | | | | |
| | 2 | [125;145] | [135;155] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{21}^{pm} = 4$ | 122 | [85;100]; [170;185] | [95;110]; [180;195] | $k_{11}^{pm} = 3, k_{12}^{pm} = 0$ $k_{21}^{pm} = 0, k_{22}^{pm} = 2$ | 114 |
| | $d_1 = 150; d_2 = 160$ | | | | $d_1 = 210; d_2 = 240$ | | | | |
| | 4 | [135;155] | [145;165] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{21}^{pm} = 6$ | 128 | [100;115]; [185;200] | [110;125]; [195;210] | $k_{11}^{pm} = 1, k_{12}^{pm} = 4$ $k_{21}^{pm} = 3, k_{22}^{pm} = 0$ | 121 |
| $d_1 = 220; d_2 = 250$ | | | | $d_1 = 220; d_2 = 250$ | | | | | |
| 8 | [145;165] | [155;175] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{21}^{pm} = 5$ | 136 | [115;130]; [200;215] | [125;140]; [210;225] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{12}^{pm} = 3$ $k_{21}^{pm} = 1, k_{22}^{pm} = 4$ | 129 | |
| ВАРИАНТ 2 | | | | | | | | | |
| $L = 2, B = 1, J = 5, I = 6, W = 4, K = 2, n_{wk} = 12$ | | | | | $L = 2, B = 2, J = 4, I = 5, W = 4, K = 2, n_{wk} = 12$ | | | | |
| $d_1 = 90; d_2 = 100$ | | | | $d_1 = 90; d_2 = 100$ | | | | | |
| 1 | [50;80] | [55;85] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{21}^{pm} = 2$ | 8 | [30;55]; [70;95] | [40;65]; [75;100] | $k_{11}^{pm} = 5, k_{12}^{pm} = 1$ $k_{21}^{pm} = 1, k_{22}^{pm} = 0$ | 22 | |
| 2 | [60;90] | [65;95] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{21}^{pm} = 4$ | 14 | [35;60]; [75;100] | [45;70]; [80;105] | $k_{11}^{pm} = 3, k_{12}^{pm} = 1$ $k_{21}^{pm} = 0, k_{22}^{pm} = 2$ | 24 | |
| $d_1 = 100; d_2 = 110$ | | | | $d_1 = 100; d_2 = 110$ | | | | | |
| 4 | [70;100] | [75;105] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{21}^{pm} = 1$ | 17 | [45;70]; [85;110] | [55;80]; [90;115] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{12}^{pm} = 0$ $k_{21}^{pm} = 0, k_{22}^{pm} = 3$ | 29 | |
| 8 | [80;110] | [85;115] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{21}^{pm} = 2$ | 20 | [55;80]; [95;120] | [65;90]; [100;125] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{12}^{pm} = 0$ $k_{21}^{pm} = 0, k_{22}^{pm} = 3$ | 36 | |

| | $\max(p_{lw})/\min(p_{lwr})$ | $\max(t_{li})/\min(t_{li})$ | Интервалы времени, в которых определяется положение реализации ПТО | | Решение по размещению ПТО во временных интервалах – значения k_{li}^{pm} ($l = \overline{1,2}$) | Значение критерия f | Интервалы времени, в которых определяется положение реализации ПТО | | Решение по размещению ПТО во временных интервалах – значения k_{lb}^{pm} ($l = \overline{1,2}; b = \overline{1,2}$) | Значение критерия f |
|---|------------------------------|-----------------------------|--|---|---|-----------------------|--|--|---|-----------------------|
| | | | ($l = 1$)-го прибора [$s_{11}; e_{11}$] | ($l = 2$)-го прибора [$s_{21}; e_{21}$] | | | ($l = 1$)-го прибора [$s_{1b}; e_{1b}$] | ($l = 2$)-го прибора [$s_{2b}; e_{2b}$] | | |
| 2 | $d_1 = 110; d_2 = 120$ | | | | $d_1 = 110; d_2 = 120$ | | | | | |
| | 1 | [60;90] | [70;100] | $k_{11}^{pm} = 5, k_{21}^{pm} = 7$ | 27 | [40;65]; [95;120] | [50;75]; [105;130] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{12}^{pm} = 0$ $k_{21}^{pm} = 7, k_{22}^{pm} = 9$ | 72 | |
| | 2 | [70;100] | [80;110] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{21}^{pm} = 5$ | 32 | [50;75]; [105;130] | [60;85]; [115;140] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{12}^{pm} = 3$ $k_{21}^{pm} = 7, k_{22}^{pm} = 9$ | 76 | |
| | $d_1 = 120; d_2 = 130$ | | | | $d_1 = 120; d_2 = 130$ | | | | | |
| | 4 | [80;110] | [90;120] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{21}^{pm} = 3$ | 39 | [60;85]; [115;140] | [70;95]; [125;150] | $k_{11}^{pm} = 2, k_{12}^{pm} = 4$ $k_{21}^{pm} = 0, k_{22}^{pm} = 0$ | 85 | |
| 4 | $d_1 = 140; d_2 = 150$ | | | | $d_1 = 190; d_2 = 220$ | | | | | |
| | 1 | [110;140] | [120;155] | $k_{11}^{pm} = 2, k_{21}^{pm} = 11$ | 102 | [65;90]; [155;180] | [75;100]; [165;190] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{12}^{pm} = 0$ $k_{21}^{pm} = 2, k_{22}^{pm} = 5$ | 98 | |
| | $d_1 = 150; d_2 = 160$ | | | | $d_1 = 200; d_2 = 230$ | | | | | |
| | 2 | [120;150] | [130;160] | $k_{11}^{pm} = 2, k_{21}^{pm} = 11$ | 111 | [80;105]; [165;190] | [90;115]; [175;200] | $k_{11}^{pm} = 3, k_{12}^{pm} = 2$ $k_{21}^{pm} = 6; k_{22}^{pm} = 8$ | 106 | |
| | $d_1 = 150; d_2 = 160$ | | | | $d_1 = 210; d_2 = 240$ | | | | | |
| | 4 | [130;160] | [140;170] | $k_{11}^{pm} = 2, k_{21}^{pm} = 11$ | 116 | [95;120]; [180;205] | [105;130]; [190;215] | $k_{11}^{pm} = 2, k_{12}^{pm} = 3$ $k_{21}^{pm} = 0, k_{22}^{pm} = 5$ | 115 | |
| 4 | $d_1 = 220; d_2 = 250$ | | | | $d_1 = 220; d_2 = 250$ | | | | | |
| | 8 | [140;170] | [150;180] | $k_{11}^{pm} = 2, k_{21}^{pm} = 8$ | 124 | [110;135]; [195;220] | [120;145]; [205;230] | $k_{11}^{pm} = 0, k_{12}^{pm} = 3$ $k_{21}^{pm} = 2, k_{22}^{pm} = 3$ | 124 | |

На основе анализа результатов сделаны следующие выводы, касающиеся особенностей процессов выполнения ПЗ в КС с учетом ПТО, положения реализаций которых оптимизируются в рамках заданных временных «окон».

Во-первых, при больших значениях отношения $\max(t_{li})/\min(t_{li}) = 2$ рост неоднородностей длительностей переналадок приборов (увеличение значений отношения $\max(p_{lw})/\min(p_{lwr})$) не приводит к значительному росту запаздываний с исполнением заказов, так как большие значения неоднородностей длительностей выполнения заданий (значения отношения $\max(t_{li})/\min(t_{li})$) уже являются причиной запаздываний (рисунки 1b и 2b).

Во-вторых, увеличение длины интервалов времени, в рамках которых осуществляется оптимизация положения ПТО приборов, позволяет сократить суммарные запаздывания с исполнением заказов (увеличение длины интервалов позволяет сформировать более эффективные решения по определению положения ПТО с учетом особенностей процессов выполнения ПЗ в КС, выполнить планирование процессов выполнения ПЗ в КС при увеличении их производительности).

В-третьих, при малых значениях отношения $\max(t_{li})/\min(t_{li}) = 1$ увеличение длины интервалов, в которых осуществляется оптимизация поло-

жения ПТО, позволяет более значительно сократить запаздывания с исполнением заказов; при росте значений отношения $\max(t_{li})/\min(t_{li}) = 2$ увеличение длины интервалов, в которых осуществляется оптимизация положения ПТО, позволяет незначительно сократить запаздывания.

В-четвертых, значения переменных k_{lb}^{pm} ($l = \overline{1,2}; b = \overline{1,2}$), соответствующих решению задачи, показывают, что при различных значениях отношений $\max(t_{li})/\min(t_{li})$ и $\max(p_{lw})/\min(p_{lwr})$ увеличение интервалов доступности второго прибора осуществляется в большей степени в сравнении с интервалами доступности первого прибора. Решение формируется таким образом, чтобы исключить пересечение интервалов недоступности приборов, являющихся следствием их ПТО.

Заключение

Реализация многостадийных процессов выполнения ПЗ в КС подвержена влиянию отказов приборов и их восстановления после отказов. Поддержание приборов конвейерных систем в работоспособном состоянии и уменьшение количества отказов при их функционировании обеспечивается их предварительным техническим обслуживанием, в ходе которого реализуется устранение неполадок и неисправностей. При плановом ПТО приборы КС

являются доступными в течение ограниченных интервалов времени. Однако длительности интервалов времени доступности приборов (между ПТО) могут быть изменены с учетом особенностей процессов выполнения ПЗ в КС. В этом случае положение реализаций ПТО приборов оптимизируется внутри интервалов времени заданной длительности (временных «окон»), а сами интервалы времени доступности приборов не являются фиксированными. Оптимизация рассматриваемых процессов предусматривает определение эффективных решений по назначению заданий в составы пакетов, включению пакетов в интервалы доступности приборов, по порядку пакетов для проведения действий с ними на приборах КС в этих интервалах, по определению положения реализаций ПТО внутри интервалов времени заданной длительности. В связи с этим выполнена разработка нелинейной математической модели, позволяющей оптимизировать рассматриваемые решения для задач малой размерности. Получены обобщенные выражения, позволяющие определять значения индикаторных переменных при выполнении / не выполнении условий превышения значениями функции заданных граничных значений. Эти выражения позволяют усовершенствовать способы построения математических моделей дискретной оптимизации решений. На основе этих выражений и введенных индикаторных переменных сформированы ограничения, соответствующие условию распределения всех заданий разных типов по пакетам, включаемым в интервалы доступности приборов, при условии, что эти задания входят в заказы разных видов. Оптимизация интервалов доступности приборов осуществляется путем определения смещений начала реализаций ПТО относительно левых границ заданных временных интервалов (временных «окон»). Выполнена линеаризация полученной модели. Для этого введены индикаторные переменные, с использованием которых осуществлена линеаризация отдельных выражений модели.

Список источников

1. Кротов К.В. Модели смешанного целочисленного линейного программирования оптимизации включения заданий в пакеты и порядков проведения операций с ними в конвейерных системах // Информационно-управляющие системы. 2024. № 6(13). С. 46–57. DOI:10.31799/1684-8853-2024-6-46-57. EDN:EFACX
2. Кротов К.В. Целочисленная оптимизация решений по включению заданий в пакеты и порядкам выполнения пакетов в системе Flow Shop при ограничениях на доступность приборов заданной периодичности // Труды учебных заведений связи. 2025. Т. 11. № 6. С. 7–24. EDN:AOXJEV
3. Aghezzaf E.-H., Khatab A., Tam P. L. Optimizing production and imperfect preventive maintenance planning's integration in failure-prone manufacturing systems // Reliability Engineering and System Safety. 2016. Vol. 145. PP. 190–198. DOI:10.1016/j.res.2015.09.017. EDN:VENHRR
4. Tam P.L., Aghezzaf E.-H., Khatab A., Le C.H. Integrated Production and Imperfect Preventive Maintenance Planning An Effective MILP-based Relax-and-Fix/Fix-and-Optimize Method // Proceedings of the 6th International Conference on Operations Research and Enterprise Systems (ICORES 2017, Porto, Portugal, 23–25 February 2017). 2017. Vol. 1. PP. 483–490 DOI:10.5220/0006285504830490
5. Shehni A.A., Cheaitou A., Alyouf I. Integrated Production and Maintenance Planning: A Comparison Between Block Policies // Proceedings of the 10th International Conference on Industrial Engineering and Operations Management (Dubai, UAE, 10–12 March 2020). PP. 1765–1773. URL: <https://www.ieomsociety.org/ieom2020/papers/300.pdf> (Accessed 08.12.2025)

Для проведения исследований в соответствии с полученной моделью MILP разработано приложение в среде IBM ILOG CPLEX. Исследования модели проводились при разных длительностях временных «окон», в которых оптимизируется положение реализаций ПТО приборов. Полученные результаты показали работоспособность модели MILP при оптимизации рассматриваемых решений. На основе этих результатов сформулированы выводы, касающиеся особенностей планирования процессов выполнения ПЗ в КС и особенностей планирования ПТО приборов.

Разработанная модель MILP позволяет наряду с оптимизацией решений по составам ПЗ, их включению в интервалы времени доступности приборов, порядкам их выполнения внутри этих интервалов осуществлять оптимизацию решений по размещению ПТО приборов в рамках временных «окон» и по длительностям нефиксированных интервалов времени доступности приборов. Возможность оптимизации с использованием этой модели длительностей интервалов времени доступности приборов, а также учет при оптимизации условия распределения заданий по заказам, для которых указаны директивные сроки, обуславливает новизну полученных теоретических и практических результатов. Модель MILP и полученные с ее использованием результаты значительно отличаются от опубликованных автором ранее результатов [2], что позволяет сделать вывод о развитии модели [2] в рассматриваемой работе и об ее новизне.

Рассматриваемая задача решается с использованием аппарата MILP впервые, что позволяет сделать вывод об оригинальности сформированной модели и полученных с ее использованием результатов. Модель MILP может быть применена при планировании процессов в гибких производственных системах конвейерного типа, реализующих выпуск широкой номенклатуры деталей, при учете ПТО приборов.

6. Moghaddam K.S. A Multi-Objective Modeling Approach for Integrated Manufacturing and Preventive Maintenance Planning // *Operations and Supply Chain Management*. 2021. Vol. 14. Iss. 1. PP. 83–99. DOI:10.31387/oscm0440288
7. Hosseini S.M.H. Modeling the hybrid flow shop scheduling problem followed by an assembly stage considering aging effects and preventive maintenance activities // *International Journal of Supply and Operations Management*. 2016. Vol. 3. Iss. 1. PP. 1215–1233.
8. Chansombat S., Pongcharoen P., Hicks C. A mixed-integer linear programming model for integrated production and preventive maintenance scheduling in the capital goods industry // *International Journal of Production Research*. 2019. Vol. 57. Iss. 1. PP. 61–82. DOI:10.1080/00207543.2018.1459923
9. Boufellouh R., Belkaid F. Bi-objective optimization algorithms for joint production and maintenance scheduling under a global resource constraint: Application to the permutation flow shop problem // *Computers and Operations Research*. 2020. Vol. 122(3). P. 104943. DOI:10.1016/j.cor.2020.104943. EDN:TFBTAM
10. Al-Shayea A., Fararah E., Nasr E.A., Mahmoud H.A. Model for Integrating Production Scheduling and Maintenance Planning of Flow Shop Production System // *IEEE Access*. 2020. Vol. 8. 2020. PP. 208826–208834. DOI:10.1109/ACCESS.2020.3038719. EDN:WKJARC
11. Fattahi P., Fazlollahabadi H. A Joint Optimization Model for Production Scheduling and Preventive Maintenance Interval // *International Journal of Engineering. Transactions B: Applications*. 2021. Vol. 34. Iss. 11. PP. 2508–2516.
12. Forghani A., Lotfi M.M., Ranjbar M., Sadegheih A. Hierarchical framework for maintenance and production scheduling of continuous ball mills in tile industries under TOU electricity pricing // *Journal of Cleaner Production*. 2021. Vol. 327. P. 129440. DOI:10.1016/j.jclepro.2021.129440. EDN:RMVTBA
13. Chen Y., Guan Z., Wang Ch., Chou F.-D., Yue L. Bi-objective optimization of identical parallel machine scheduling with flexible maintenance and job release times // *International Journal of Industrial Engineering Computations*. 2022. Vol. 13. PP. 457–472. DOI:10.5267/j.ijiec.2022.8.003. EDN:XQSOFO
14. Kumar T.J., Thangaraj M. An ordered precedence constrained flow shop scheduling problem with machine specific preventive maintenance // *Journal of Project Management*. 2023. Vol. 8. PP. 45–56. DOI:10.5267/j.jpjpm.2022.8.002. EDN:GGFBCY
15. Eseh M. K., Shojaei A.A., Javanshir H., Damghani K.K. Solving a bi-objective flexible flow shop problem with transporter preventive maintenance planning and limited buffers by NSGA-II and MOPSO // *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*. 2022. Vol. 31. Iss. 1. PP. 217–246. DOI:10.22075/ijnaa.2021.24335.2719
16. Lunardi W.T., Cherri L.H., Voos H. A Mathematical Model and a Firefly Algorithm for an Extended Flexible Job Shop Problem with Availability Constraints // *Proceedings of the 17th International Conference Artificial Intelligence and Soft Computing (ICAISC 2018, Zakopane, Poland, 3–7 June 2018)*. Lecture Notes in Computer Science. Cham: Springer, 2018. Vol. 10841. PP. 548–560. DOI:10.1007/978-3-319-91253-0_51
17. Labidi M., Kooli A., Ladhari T., Gharbi A., Suryahatmaja U.S. A Computational Study of the Two-Machine No-Wait Flow Shop Scheduling Problem Subject to Unequal Release Dates and Non-Availability Constraints // *IEEE Access*. 2018. Vol. 6. PP. 16294–16304. DOI:10.1109/ACCESS.2018.2815598. EDN:YHVJLF
18. Barjoui A.S., Barabadi A., Tavakkoli-Moghaddam R. Non-Preemptive Open Shop Scheduling Considering Machine Availability // *Proceedings of International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM, Macao, China, 15–18 December 2019)*. IEEE, 2019. PP. 1280–1284. DOI:10.1109/IEEM44572.2019.8978648
19. Lunardi W.T., Birgin E.G., Laborie Ph., Ronconi D.P., Voos H. Mixed Integer linear programming and constraint programming models for the online printing shop scheduling problem // *Computers & Operations Research*. 2020. Vol. 123. P. 105020. DOI:10.1016/j.cor.2020.105020. EDN:WXRELS
20. Gencsi M. Metaheuristic Algorithms for Related Parallel Machines Scheduling Problem with Availability and Periodical Unavailability Constraints // *Acta Polytechnica Hungarica*. 2024. Vol. 21. Iss. 2. PP.89–110. DOI:10.12700/aph.21.2.2024.2.5. EDN:SESBKT
21. Aggoune R., Deleplanque S. Addressing Machine Unavailability in Job Shop Scheduling: A Quantum Computing Approach // In: Sevaux M., Olteanu A.L., Pardo E.G., Sifaleras A., Makboul S. (eds) *Metaheuristics. Proceedings of the 15th International Conference (MIC 2024, Lorient, France, 4–7 June 2024)*. Lecture Notes in Computer Science. Cham: Springer, 2024. Vol. 14753. PP. 234–245. DOI:10.1007/978-3-031-62912-9_23
22. Зак Ю.А. Построение расписаний работы сборочных конвейеров в мелко- и среднесерийном производстве // *Проблемы управления*. 2019. № 2. С. 54–59. DOI:10.25728/ru.2019.2.7. EDN:PPVWYE
23. Хоботов Е.Н. Задачи и методы построения расписаний работ для предприятий со ступенчатой сборкой выпускаемых изделий // *Автоматика и телемеханика*. 2023. № 12. С. 80–95. DOI:10.31857/S0005231023120073. EDN:NGKFUJ
24. Харсекин И.Р., Кузнецова Е.А., Князева И.О. Алгоритм оптимизации процессов формирования производственного расписания предприятий позаказного производства // *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2023. Т. 11. № 1. DOI:10.26102/2310-6018/2023.40.1.00. EDN:NWDWLA
25. Короткова Ю.Л. Исследование и разработка методов синтеза и регулирования расписаний движения воздушных судов авиакомпаний. Дис. ... канд. техн. наук. Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2022. 191 с. EDN:GPMYDX
26. Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. Математические методы оптимизации при составлении учебного расписания // 13-я Международная научно-практическая конференция «Технологии "1С" для эффективного обучения и подготовки кадров в целях повышения производительности труда». М.: ООО "1С-Пабблишинг", 2013. С. 51–55.
27. Деканова М.В. Математическая модель и алгоритм построения расписания учебных занятий университета // *Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки*. 2013. № 12. С. 24–33. EDN:TVSGFP
28. Клеванский Н.Н. Формирование расписания занятий высших учебных заведений // *Образовательные ресурсы и технологии*. 2015. № 1(9). С. 34–44. EDN:TNDTSR

29. Шишканова Т.А. Алгоритм оптимизации учебного расписания в вузе // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). 2015. № 1. С. 416–422. EDN:TJLKBJ
30. Насонов М.А., Манцеров С.А. Управление потоками заданий ремонтных бригад в условиях изменчивости графика обслуживания оборудования // Труды НГТУ им. П.Е. Алексеева. 2026. № 1(152). С. 17–31.
31. Писаренко В.Н. Оптимизация технического обслуживания стареющих газоперекачивающих агрегатов компрессорных станций // Нефтегазовое дело. 2015. Т. 13. № 2. С. 105–110. EDN:VEDIFN
32. Ярцев В.Н. Оптимизация процессов технического обслуживания оборудования: методы и современные подходы // Вестник Воронежского института высоких технологий. 2024. № 3(50). EDN:PIHBUV
33. Еримбет А.К. Оптимизация интервалов технического обслуживания на основе факторов эксплуатации оборудования // Актуальные исследования. 2025. № 43-1(278). С. 64–67. EDN:GWWRZE
34. Williams H.P. Model Building in Mathematical Programming. John Wiley & Sons, 2013. 432 p.
35. Asghari M., Fathollahi-Fard A.M., Mirzapour Al-e-Hashem S.M.J., Dulebenets M.A. Transformation and Linearization Techniques in Optimization: A State-of-the-Art Survey // Mathematics. 2022. Vol. 10. Iss. 2. P. 283 DOI:10.3390/math10020283. EDN:ABRVQM

References

1. Krotov K.V. Models of mixed integer linear programming for optimizing the inclusion of tasks in packages and the procedures for performing operations with them in conveyor systems. Information and Control Systems. 2024;6(13):46–57. (in Russ.) DOI:10.31799/1684-8853-2024-6-46-57. EDN:EFACAX
2. Krotov K.V. Solutions' Integer Optimization for Tasks Inclusion in Packages and Package Execution Orders in the Flow Shop System Under Restrictions on the Availability of Devices with a Given Frequency. *Proceedings of Telecommunication Universities*. 2025;11(6):7–24. (in Russ.) EDN:AOXJEV
3. Aghezzaf E.-H., Khatab A., Tam P. L. Optimizing production and imperfect preventive maintenance planning's integration in failure-prone manufacturing systems. *Reliability Engineering and System Safety*. 2016;145:190–198. DOI:10.1016/j.res.2015.09.017. EDN:VENHRR
4. Tam P.L., Aghezzaf E.-H., Khatab A., Le C.H. Integrated Production and Imperfect Preventive Maintenance Planning An Effective MILP-based Relax-and-Fix/Fix-and-Optimize Method. *Proceedings of the 6th International Conference on Operations Research and Enterprise Systems, ICORES 2017, 23–25 February 2017, Porto, Portugal, vol.1*. 2017. p.483–490 DOI:10.5220/0006285504830490
5. Shehni A.A., Cheaitou A., Alsyof I. Integrated Production and Maintenance Planning: A Comparison Between Block Policies. *Proceedings of the 10th International Conference on Industrial Engineering and Operations Management, 10–12 March 2020, Dubai, UAE*. p.1765–1773. URL: <https://www.ieomsociety.org/ieom2020/papers/300.pdf> [Accessed 08.12.2025]
6. Moghaddam K.S. A Multi-Objective Modeling Approach for Integrated Manufacturing and Preventive Maintenance Planning. *Operations and Supply Chain Management*. 2021;14(1):83–99. DOI:10.31387/oscm0440288
7. Hosseini S.M.H. Modeling the hybrid flow shop scheduling problem followed by an assembly stage considering aging effects and preventive maintenance activities. *International Journal of Supply and Operations Management*. 2016;3(1):1215–1233.
8. Chansombat S., Pongcharoen P., Hicks C. A mixed-integer linear programming model for integrated production and preventive maintenance scheduling in the capital goods industry. *International Journal of Production Research*. 2019;57(1):61–82. DOI:10.1080/00207543.2018.1459923
9. Boufellouh R., Belkaid F. Bi-objective optimization algorithms for joint production and maintenance scheduling under a global resource constraint: Application to the permutation flow shop problem. *Computers and Operations Research*. 2020;122(3):104943. DOI:10.1016/j.cor.2020.104943. EDN:TFBTAM
10. Al-Shayea A., Fararah E., Nasr E.A., Mahmoud H.A. Model for Integrating Production Scheduling and Maintenance Planning of Flow Shop Production System. *IEEE Access*. 2020;8:208826–208834. DOI:10.1109/ACCESS.2020.3038719. EDN:WKJARC
11. Fattahi P., Fazlollahtabar H. A Joint Optimization Model for Production Scheduling and Preventive Maintenance Interval. *International Journal of Engineering, Transactions B: Applications*. 2021;34(11):2508–2516.
12. Forghani A., Lotfi M.M., Ranjbar M., Sadegheih A. Hierarchical frame-work for maintenance and production scheduling of continuous ball mills in tile industries under TOU electricity pricing. *Journal of Cleaner Production*. 2021;327:129440. DOI:10.1016/j.jclepro.2021.129440. EDN:RMVTBA
13. Chen Y., Guan Z., Wang Ch., Chou F.-D., Yue L. Bi-objective optimization of identical parallel machine scheduling with flexible maintenance and job release times. *International Journal of Industrial Engineering Computations*. 2022;13:457–472. DOI:10.5267/j.ijiec.2022.8.003. EDN:XQSOFO
14. Kumar T.J., Thangaraj M. An ordered precedence constrained flow shop scheduling problem with machine specific preventive maintenance. *Journal of Project Management*. 2023;8:45–56. DOI:10.5267/j.jpjm.2022.8.002. EDN:GGFCY
15. Esfeh M.K., Shojaei A.A., Javanshir H., Damghani K.K. Solving a bi-objective flexible flow shop problem with transporter preventive maintenance planning and limited buffers by NSGA-II and MOPSO. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*. 2022;31(1):217–246. DOI:10.22075/ijnaa.2021.24335.2719
16. Lunardi W.T., Cherri L.H., Voos H. A Mathematical Model and a Firefly Algorithm for an Extended Flexible Job Shop Problem with Availability Constraints. *Proceedings of the 17th International Conference Artificial Intelligence and Soft Computing, ICAISC 2018, 3–7 June 2018, Zakopane, Poland. Lecture Notes in Computer Science, vol.10841*. Cham: Springer; 2018. p.548–560. DOI:10.1007/978-3-319-91253-0_51


17. Labidi M., Kooli A., Ladhari T., Gharbi A., Suryahatmaja U.S. A Computational Study of the Two-Machine No-Wait Flow Shop Scheduling Problem Subject to Unequal Release Dates and Non-Availability Constraints. *IEEE Access*. 2018;6:16294–16304. DOI:10.1109/ACCESS.2018.2815598. EDN:YHVJLF
18. Barjoui A.S., Barabadi A., Tavakkoli-Moghaddam R. Non-Preemptive Open Shop Scheduling Considering Machine Availability. Proceedings of International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management, IEEM, 15–18 December 2019, Macao, China. IEEE; 2019. p.1280–1284. DOI:10.1109/IEEM44572.2019.8978648
19. Lunardi W.T., Birgin E.G., Laborie Ph., Ronconi D.P., Voos H. Mixed Integer linear programming and constraint programming models for the online printing shop scheduling problem. *Computers & Operations Research*. 2020;123:105020. DOI:10.1016/j.cor.2020.105020. EDN:WXRELS
20. Gencsi M. Metaheuristic Algorithms for Related Parallel Machines Scheduling Problem with Availability and Periodical Unavailability Constraints. *Acta Polytechnica Hungarica*. 2024;21(2):89–110. DOI:10.12700/aph.21.2.2024.2.5. EDN:SESBKT
21. Aggoune R., Deleplanque S. Addressing Machine Unavailability in Job Shop Scheduling: A Quantum Computing Approach. In: *Sevaux M., Olteanu A.L., Pardo E.G., Sifaleras A., Makboul S. (eds) Metaheuristics. Proceedings of the 15th International Conference, MIC 2024, 4–7 June 2024, Lorient, France. Lecture Notes in Computer Science, vol.14753*. Cham: Springer; 2024. p.234–245. DOI:10.1007/978-3-031-62912-9_23
22. Zak Yu.A. Building the assembly line timetables in small- and medium-scale production. *Control Sciences*. 2019;2:54–59. (in Russ.) DOI:10.25728/pu.2019.2.7. EDN:PPVWYE
23. Khabotov E.N. Tasks and methods of scheduling work for enterprises with slipway assembly of manufactured products. *Avtomatika i Telemekhanika*. 2023;12:80–95. (in Russ.) DOI:10.31857/S0005231023120073. EDN:NGKFUJ
24. Kharsekin I.R., Kuznetsova E.A., Knyazeva I.O. Process optimization algorithm for forming the production schedule of custom production enterprises. *Modeling, Optimization and Information Technologies*. 2023;11(1). (in Russ.) DOI:10.26102/2310-6018/2023.40.1.00. EDN:NWDWLA
25. Korotkova Yu.L. *Research and development of methods for the synthesis and regulation of airline aircraft schedules*. Ph.D. Thesis. Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University Publ.; 2022. 191 p. (in Russ.) EDN:GPMYDX
26. Lazarev A.A., Gafarov E.R. *Mathematical optimization methods in the preparation of the curriculum*. Proceedings of the 13th International Scientific and Practical Conference "1C Technologies for effective education and training in order to increase labor productivity". Moscow: 1C-Publishing LLC; 2013. p.51–55. (in Russ.)
27. Dekanova M. Mathematical model and algorithm of timetabling at university. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C. Fundamental'nye nauki*. 2013;12:24–33. (in Russ.) EDN:TVSGFP
28. Klevansky N.N. High school and university timetabling. *Educational Resources and Technologies*. 2015;1(9):34–44. (in Russ.) EDN:TNDTSR
29. Shishkanova T.A. The optimization algorithm in high school curricula. *Mining Information and Analytical Bulletin*. 2015;1:416–422. (in Russ.) EDN:TJLKBJ
30. Nasonov M.A., Mantserov S.A. Task flow management for maintenance teams under changing equipment service schedules. *Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev*. 2026;1(152):17–31. (in Russ.)
31. Pisarenko V.N. Optimization of technical maintenance of senescent gascompressor units of the compressor stations. *Oil and Gas Business*. 2015;13(2):105–110. (in Russ.) EDN:VEDIFN
32. Yartsev V.N. Optimization of equipment maintenance processes: methods and modern approaches. *Bulletin of the Voronezh Institute of High Technologies*. 2024;3(50). (in Russ.) EDN:PIHBUV
33. Yerimbet A.K. Optimization of maintenance intervals based on equipment operation factors. *Current Research*. 2025; 43-1(278):64–67. (in Russ.) EDN:GWWRZE
34. Williams H.P. *Model Building in Mathematical Programming*. John Wiley & Sons, 2013. 432 p.
35. Asghari M., Fathollahi-Fard A.M., Mirzapour Al-e-Hashem S.M.J., Dulebenets M.A. Transformation and Linearization Techniques in Optimization: A State-of-the-Art Survey. *Mathematics*. 2022;10(2):283 DOI:10.3390/math10020283. EDN:ABRVQM

Статья поступила в редакцию 28.02.2026; одобрена после рецензирования 24.03.2026; принята к публикации 10.04.2026

The article was submitted 28.02.2026; approved after reviewing 24.03.2026; accepted for publication 10.04.2026

Информация об авторе:

**КРОТОВ
Кирилл Викторович**

доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Информационные технологии и системы» Севастопольского государственного университета
 <https://orcid.org/0000-0002-9670-6141>

Автор сообщает об отсутствии конфликтов интересов.

The authors declare no conflicts of interests.