

Научная статья

УДК 004:519.854

<https://doi.org/10.31854/1813-324X-2025-11-6-7-24>

EDN:AOXJEV



Целочисленная оптимизация решений по включению заданий в пакеты и порядкам выполнения пакетов в системе Flow Shop при ограничениях на доступность приборов заданной периодичности

 Кирилл Викторович Кротов, krotov_k1@mail.ru

Севастопольский государственный университет,
Севастополь, 299053, Российская Федерация

Аннотация

Эффективность процессов выполнения заданий разных типов в системах Flow Shop обеспечивается формированием пакетов и оптимизацией их порядков для осуществления операций с ними на приборах указанных систем. Процесс выполнения пакетов подвержен влиянию отказов приборов и их простоев, связанных с восстановлением. Влияние отказов и восстановления приборов может быть уменьшено за счет их предварительного технического обслуживания. В течение интервалов времени обслуживания приборы являются недоступными для реализации назначенных им функций. Путем обработки статистических данных могут быть определены интервалы времени между реализациями предварительного технического обслуживания приборов (определены периоды их доступности). По этой причине **актуально** решение задач оптимизации составов пакетов, их включения в интервалы времени доступности приборов, расписаний их выполнения в этих интервалах. При малых размерах задач их решения могут быть определены путем использования математических моделей смешанного целочисленного линейного программирования.

Цель работы состоит в построении новой математической модели смешанного целочисленного линейного программирования, использование которой позволяет определять оптимальные решения рассматриваемого вида. Для достижения цели в работе применены **методы** построения моделей математического программирования. На первом этапе реализовано формирование нелинейной математической модели целочисленного программирования. На втором этапе с целью снижения временных затрат на получение решений проведена линеаризация модели. Для верификации модели осуществлена разработка приложения в программе IBM ILOG CPLEX. В ходе исследований получены **результаты**, которые показали эффективность модели при решении задач планирования выполнения пакетов заданий в конвейерных системах при ограниченной доступности приборов.

Научная новизна результатов предполагает, что в модели использован способ передачи заданий между двумя приборами непосредственно в момент времени окончания их выполнения на предшествующем приборе. Их **теоретическая значимость** состоит в получении **новых** выражений, позволяющих определять значения индикаторных переменных при превышении значениями функций заданных границ. На основе этих выражений сформированы ограничения, обеспечивающие требование включения всех заданий разных типов в пакеты в интервалах времени доступности приборов.

Ключевые слова: математические модели смешанного целочисленного линейного программирования, предварительное техническое обслуживание приборов, пакеты заданий, конвейерные системы, расписания


Ссылка для цитирования: Кротов К.В. Целочисленная оптимизация решений по включению заданий в пакеты и порядкам выполнения пакетов в системе Flow Shop при ограничениях на доступность приборов заданной периодичности // Труды учебных заведений связи. 2025. Т. 11. № 6. С. 7–24. DOI:10.31854/1813-324X-2025-11-6-7-24. EDN:AOXJEV

Original research

<https://doi.org/10.31854/1813-324X-2025-11-6-7-24>

EDN:AOXJEV

Solutions' Integer Optimization for Tasks Inclusion in Packages and Package Execution Orders in the Flow Shop System Under Restrictions on the Availability of Devices with a Given Frequency

 Kirill V. Krotov, krotov_k1@mail.ru

Sevastopol State University,
Sevastopol, 299053, Russian Federation

Annotation

The efficiency of the processes of performing tasks of various types in Flow Shop systems is ensured by the formation of packages and optimization of their orders for performing operations with them on the devices of these systems. The process of package execution is affected by instrument failures and downtime associated with recovery. The impact of instrument failures and repairs can be reduced by pre-maintenance. During the maintenance time intervals, the devices are unavailable for the implementation of their assigned functions. By processing statistical data, the time intervals between the pre-maintenance of the devices can be determined (the periods of their availability are determined). For this reason, it is important to solve the problems of optimizing package compositions, their inclusion in the time intervals for the availability of devices, and schedules for their execution in these intervals. With small problem sizes, their solutions can be determined by using mathematical models of mixed integer linear programming.

The purpose of the work is to build a new mathematical model of mixed integer linear programming, the use of which allows us to determine the optimal solutions of the type under consideration. To achieve this goal, the **methods** of constructing mathematical programming models are used in the work. At the first stage, the formation of a nonlinear mathematical model of integer programming was implemented. At the second stage, in order to reduce the time required to obtain solutions, the model was linearized. To verify the model, an application was developed in the IBM ILOG CPLEX program. In the course of the research, results were obtained that showed the effectiveness of the model in solving the tasks of planning the execution of task packages in conveyor systems with limited availability of devices.

The **scientific novelty** of the results suggests that the model uses a method for transferring tasks between two devices directly at the end of their execution on the previous device. Their **theoretical significance** consists in obtaining new expressions that make it possible to determine the values of indicator variables when the function values exceed the specified boundaries. Based on these expressions, constraints are formed that require the inclusion of all tasks of different types in packages in the time intervals of instrument availability.

Keywords: mathematical models of mixed integer linear programming, preliminary maintenance of devices, task packages, conveyor systems, schedules

For citation: Krotov K.V. Solutions' Integer Optimization for Tasks Inclusion in Packages and Package Execution Orders in the Flow Shop System Under Restrictions on the Availability of Devices with a Given Frequency. *Proceedings of Telecommunication Universities*. 2025;11(6):7–24. (in Russ.) DOI:10.31854/1813-324X-2025-11-6-7-24. EDN:AOXJEV

Введение

В системах конвейерного типа (системах Flow Shop) возникает необходимость осуществления операции с заданиями, принадлежащими разным типам (количество типов не менее двух). Количе-

ство заданий, принадлежащих одному типу, также не менее двух. В том случае, если время выполнения заданий на приборах одинаково, время переналадки приборов на реализацию действий с ними также одинаково, – значит, они относятся к одному

типу. Повышение эффективности процессов выполнения заданий в системах Flow Shop (в конвейерных системах (КС)) осуществляется за счет формирования из них пакетов, в которые включаются задания одного типа, и оптимизации их порядков для проведения операций с ними на приборах. Задания, включенные в один пакет, обрабатываются на приборах систем Flow Shop последовательно. Переналадка приборов осуществляется при переходе от выполнения однотипных заданий в одном пакете к выполнению заданий другого типа в следующем пакете.

Операции с заданиями, включенными в пакеты, могут быть выполнены в течение интервалов времени функционирования приборов рассматриваемых КС, после окончания каждого из которых реализуется их (приборов) профилактическое техническое обслуживание (ПТО). Цель ПТО состоит в устранении неполадок приборов с целью поддержания их работоспособного состояния. Устранение неполадок приборов позволяет исключить отказы с длительным временем восстановления (ликвидировать значительные отказы приборов), обеспечивает уменьшение количества отказов с малым временем восстановления. Результатом ПТО является повышение эффективности функционирования КС за счет уменьшения простоев приборов, связанных с их восстановлением.

Различают два вида ПТО: 1) плановое, моменты времени начала которого являются заданными и определяются на основе анализа статистической информации об отказах приборов в процессе их функционирования; 2) по состоянию приборов, моменты времени начала которого зависят от интенсивности их работы. При плановом ПТО действия, направленные на поддержание приборов в работоспособном состоянии, реализуются через заданные интервалы времени. Тогда моменты времени начала ПТО являются детерминированными. В течение интервалов времени определенной длительности приборы КС осуществляют выполнение заданий из пакетов, в течение интервалов времени ПТО приборы являются недоступными для выполнения назначенных им функций, и возникает задача оптимизации составов пакетов, оптимизации их включения в интервалы времени доступности приборов, а также оптимизации их порядков для проведения операций с ними в течение указанных интервалов доступности. Так как моменты времени начала ПТО являются заданными (рассматривается первый способ организации ПТО приборов КС), вопрос определения составов пакетов заданий (ПЗ), включения сформированных пакетов в интервалы доступности приборов заданной длительности, формулировки порядков их выполнения внутри этих интервалов имеет детерминированный характер (то есть, осуществляется определе-

ние решений указанного вида для детерминированной задачи).

В настоящее время могут быть определены два подхода к решению задач оптимизации составов ПЗ и их порядков для выполнения на приборах КС. Первый предусматривает оптимизацию количества заданий в пакетах. В этом случае определение характеристик процесса выполнения ПЗ в КС реализуется с учетом того, что между приборами пакеты передаются целиком (перемещение пакетов с предшествующего прибора на последующий осуществляется после окончания выполнения последнего задания в них). Этот подход применен автором в [1] при разработке модели MILP (*аббр. от англ. Mixed Integer Linear Programming*) – оптимизации количества заданий разных типов в пакетах и расписаний выполнения ПЗ в КС. Второй подход предусматривает назначение однотипных заданий в состав пакетов (их распределение по пакетам). Тогда идентификация характеристик процессов выполнения ПЗ в КС осуществляется с учетом того, что задания передаются с предшествующего прибора на последующий при окончании действий с ними на первом из них без ожидания завершения операций с другими заданиями. Если мощности множеств заданий, приборов и реализаций ПТО незначительны, то решение рассматриваемой задачи может быть выполнено путем разработки моделей MILP с последующим применением программ – решателей задач оптимизации. Тогда поиск эффективных решений по распределению заданий в пакеты и расписаний их выполнения в рассматриваемых системах при ограничениях на доступность приборов является актуальным.

Обзор существующих методов решения задач оптимизации расписаний выполнения заданий в обрабатывающих системах разного вида и реализаций ПТО приборов

В настоящее время исследования, связанные с разработкой математических моделей и методов планирования процессов выполнения заданий в обрабатывающих системах разного типа совместно с ПТО приборов, осуществляются в следующих направлениях:

1) оптимизация программ выпуска продукции на производственных предприятиях при условии ПТО обрабатывающих систем [2–5];

2) оптимизация расписаний проведения операций с заданиями на приборах обрабатывающих систем совместно с определением моментов времени начала их ПТО [6–14];

3) оптимизация порядков заданий для проведения операций с ними на приборах обрабатывающих систем разного вида при известных моментах времени начала их ПТО (периодичности обслуживания) и ограничениях на доступность приборов [15–20].

В [2] рассматривается задача оптимизации производственных программ выпуска продукции в течение периодов времени заданной длительности совместно с планированием ПТО всей обрабатывающей системы. Особенностью модели является учет потери производительности системы при реализации ПТО и восстановления оборудования системы после отказов, а также учет зависимости частоты отказов оборудования от фактического времени функционирования. Модель в [2] является детерминированной, вероятности отказов оборудования системы и стохастическое изменение ее производительности в ней не учитываются. Задача, аналогичная рассмотренной в [2], решается в [3]. В модели принимается во внимание изменение производительности системы при реализации ПТО и восстановлении приборов после отказов, а также изменяющаяся при увеличении времени функционирования системы частота отказов. В [3] исследуются свойства задачи, интерпретация которых позволила применить декомпозицию Данцига – Вульфа, также предложена эвристика «Relax-and-fix with fix-and-optimize».

В [4] рассматривается задача оптимизации производственных программ и планов ПТО (интервалов времени между ПТО). Наряду со стоимостью подготовки производства к выпуску продукции, стоимостью производства и хранения остатков продукции, в критериях учитываются затраты на ПТО и на восстановление системы после отказов. Восстановление системы обеспечивается реализацией двух политик: AGAN, предусматривающей замену оборудования после отказа; АВАО, предусматривающей восстановление оборудования.

При оптимизации производственных программ и планов ПТО в [5] горизонт планирования разбит на периоды, в конце каждого из которых выполняется обслуживание либо замена приборов, либо никакие операции не предпринимаются. Оптимизация осуществляется с учетом: 1) значений показателя надежности системы; 2) затрат на производство и ПТО; 3) доступности системы. При вычислении показателя надежности используется эксплуатационный возраст приборов и их частота отказов.

В [6] представлена модель MILP, использование которой позволяет оптимизировать расписания обработки деталей в системе Hybrid Flow Shop (HFS) при формировании комплектов (сборки узлов, агрегатов, изделий) и проведения ПТО приборов. Этапы решения задачи: 1) определение порядка выпуска изделий в соответствии с правилом Джонсона; 2) определение порядка обработки деталей в системе HFS эвристическим алгоритмом НЕН.

В работе [7] решается задача оптимизации расписаний обработки деталей на приборах системы Open Shop с последующей многоуровневой сбор-

кой. Реализации ПТО приборов включены в заданные временные интервалы (временные «окна»). Для оптимизации решений была предложена модель MILP. Предполагается, что вероятности отказов приборов на интервалах между ПТО стремятся к нулю, и отказы в модели не учитываются.

В [8, 9] решается задача оптимизации расписаний выполнения единичных заданий (ЕЗ) в КС с учетом ПТО приборов, их восстановления после отказов и ограниченных ресурсах. Длительности выполнения ЕЗ на приборах КС модифицируются с учетом их восстановления после отказов. Модели в этих исследованиях являются детерминированными, вероятностные параметры отказов приборов не рассматриваются.

В [10] решается задача многокритериальной оптимизации расписаний выполнения ЕЗ и реализаций ПТО параллельных приборов, входящих в состав одной машины. В модели время выполнения заданий модифицируются с учетом ПТО, вероятностей перевода приборов в результате ПТО в требуемое состояние и вероятностей восстановления приборов в исходное состояние после отказа.

В [11] решена задача оптимизации порядка выполнения заданий и реализации ПТО в системе HFS. Горизонт планирования выполнения заданий и реализации ПТО разбит на временные интервалы, каждому из которых сопоставлен вид тарифов на электроэнергию. Разработана двухуровневая модель MILP, в которой на верхнем уровне осуществляется выбор определенных типов ПТО приборов в рассматриваемых периодах времени, нижний уровень осуществляет упорядочивание заданий в интервалах времени между ПТО. Оптимизация осуществляется путем минимизации количества потребляемой энергии, максимизации интервалов времени между ПТО.

В [12] модель обеспечивает оптимизацию расписаний выполнения ЕЗ на независимо функционирующих приборах одной обрабатывающей машины и позиций ПТО в последовательностях выполнения заданий на этих приборах. Поиск эффективных решений осуществляется при учете введенных для каждого задания моментов времени их поступления в систему и директивных сроков. Временные характеристики процесса выполнения заданий на приборах модифицируются с учетом решений по ПТО приборов.

Работа [13] посвящена обоснованию метода решения задачи оптимизации порядков заданий для проведения операций с ними на трех приборах КС и размещения в последовательностях выполнения заданий реализаций ПТО. Разработан алгоритм, предусматривающий: 1) переход от трехприборной задачи к двухприборной; 2) определение для двух приборов порядка выполнения заданий на них с ис-

пользованием правила Джонсона; 3) определение моментов времени, в которые время функционирования приборов превышает задаваемое значение, после которых назначается ПТО.

Работа [14] посвящена задаче поиска эффективных расписаний реализации действий с ЕЗ в системах HFS, в составе которых имеются промежуточные буферы и транспортеры, реализующие перемещение деталей. В рассматриваемой задаче осуществляется планирование ПТО транспортеров. Оптимизация осуществляется путем минимизации недоступности системы при введении граничного значения для ее показателя надежности, а также времени выполнения заданий. Значения показателя надежности, используемые при проверке ограничений, определяются в заданные моменты времени, соответствующие окончанию зафиксированных периодов функционирования системы. Показатель надежности системы определяется с учетом времени наработки транспортеров после окончания последних реализаций их ПТО.

В [15] решена задача оптимизации расписаний выполнения ЕЗ в системе FJS (*аббр. от англ. Flexible Job Shop*) при ограничениях на доступность приборов. Сформирована модель MILP оптимизации назначения ЕЗ для выполнения в интервалах доступности приборов и их порядков для реализации действий с ними на приборах. Получены выражения для модификации длительностей выполнения заданий в том случае, если реализация действий с ними прерывается ПТО.

В [16] рассмотрена задача оптимизации расписаний выполнения ЕЗ в двухприборной КС при отсутствии блокировки приборов и ограничений на доступность приборов. Для каждого прибора задано единственное ПТО, интервалы времени реализации ПТО приборов перекрываются. Вводятся два фиктивных задания, характеристики начала и проведения операций с которыми определяются на основе параметров ПТО. Разработана модель целочисленного программирования, в которой учитывается ПТО как выполнение фиктивных заданий на каждом из приборов.

В [17] рассмотрена задача оптимизации расписаний выполнения ЕЗ в системе Open Shop с ограничениями на доступность приборов. При решении указанной задачи учтено различие в времени транспортировки заданий, что является следствием разных маршрутов их перемещения между приборами.

В [18] сформирована модель MILP оптимизации включения ЕЗ в интервалы доступности приборов и порядка следования этих заданий при выполнении. Особенностью модели является введение отношения предшествования для операций и учет возможности прерывания выполнения операций реализациями ПТО.

В [19] решается задача оптимизации расписаний выполнения ЕЗ на параллельных приборах одной обрабатывающей машины при фиксированных моментах времени начала их ПТО. Наряду с ограничением доступности, вводится ограничение на время функционирования каждого прибора, что позволяет идентифицировать количество ПТО.

В [20] решена задача оптимизации порядков заданий для проведения операций с ними в системах Job Shop при ограничениях на доступность приборов. Особенностью этого исследования является формирование на основе модели выполнения операций с заданиями квантовой бинарной модели, используемой для вычислений на квантовой аналоговой машине.

Итогом выполненного анализа является вывод о том, что отсутствуют результаты исследований, использование которых позволяет осуществлять оптимизацию составов ПЗ и порядков пакетов для проведения операций с ними на приборах КС при учете их ПТО. По этой причине решение проблемы оптимизации распределения заданий по пакетам и расписаний их выполнения в КС с учетом ПТО приборов (при ограничениях на доступность приборов) является актуальным. При этом необходимым условием в рассматриваемой задаче является задание фиксированных интервалов времени между ПТО приборов (длительность этих интервалов является неизменной – детерминированной). Тогда определяемые в ходе оптимизации составы пакетов, решения по включению пакетов в интервалы доступности приборов ограниченной длительности и по порядкам их выполнения в этих интервалах являются детерминированными.

Постановка задачи исследований предполагает, что являются заданными:

- 1) тип обрабатывающих систем (системы Flow Shop – КС);
- 2) способ типизации заданий в соответствии с равными значениями времени:
 - их выполнения на приборах;
 - переналадки приборов на их выполнение;
- 3) способ выполнения заданий, предусматривающий формирование из них пакетов (в один пакет могут входить задания только одного типа);
- 4) способ передачи заданий из пакетов между двумя приборами, предусматривающий их перемещение с предшествующего прибора на последующий сразу при окончании выполнения заданий на первом из них;
- 5) ограничение на интервалы времени доступности приборов.

Перед автором стоит необходимость разработки модели MILP для оптимизации решений по назначению заданий в состав пакетов, включению пакетов в интервалы доступности приборов, определению их порядков для проведения операций с ними

на приборах КС в течение интервалов времени доступности, разработки приложения в программе IBM ILOG CPLEX для полученной модели, проведения исследований с целью верификации модели.

Оптимизация составов ПЗ и расписаний их выполнения реализуется с целью минимизации общей длительности процессов осуществления операций с заданиями разных типов в КС. Аналогичным образом оптимизация указанных решений при учете ограничения на доступность приборов (при заданных длительностях интервалов времени функционирования приборов между ПТО) реализуется с этой же целью (то есть с целью минимизации общей длительности рассматриваемых процессов). С точки зрения классических постановок задач теории расписаний общей длительности процесса осуществления операций с заданиями в КС соответствует критерий C_{\max} . Основываясь на этих рассуждениях, разработка модели MILP оптимизации рассматриваемых решений осуществляется с учетом требования минимизации критерия C_{\max} при поставленном ограничении на длительности интервалов времени между ПТО приборов КС.

Математическая модель, применяемая для оптимизации составов пакетов заданий, назначения пакетов в интервалы доступности приборов, порядков пакетов для их выполнения внутри интервалов доступности

Построение математической модели, позволяющей оптимизировать решения по назначению однотипных заданий в состав пакетов и включению этих пакетов в интервалы времени доступности приборов, предусматривается введением обозначений для индексов:

l – индекс прибора;

b – индекс интервала доступности прибора КС, в течение которого он реализует выполнение ПЗ, предшествующий b -му ПТО прибора;

j – номер (индекс), под которым пакет включен в последовательность выполнения ПЗ в b -м интервале доступности прибора;

i – индекс (номер) задания, под которым оно входит в пакет, включенный под номером j в b -й интервал доступности l -го прибора;

w – индекс типа заданий, выполняемых в составе пакетов в КС.

Обозначения для параметров модели, которые позволяют охарактеризовать систему, выполняемые в ней задания и пакеты:

L – количество приборов;

J – количество пакетов, которые будут назначены в b -е интервалы доступности l -х приборов;

I – количество заданий, которые будут назначены в состав пакетов;

B – количество ПТО приборов;

$(B+1)$ – количество интервалов времени, в течение которых приборы доступны для реализации действий с ПЗ;

W – количество типов заданий;

N^w – количество заданий каждого w -го типа ($w = \overline{1, W}$).

Обозначения для параметров процесса осуществления операций с заданиями на приборах КС:

t_{lw} – время реализации операций с заданием w -го типа на l -м приборе ($l = \overline{1, L}; w = \overline{1, W}$);

p_{lw} – время наладки l -го прибора на осуществление операций с заданием w -го типа ($l = \overline{1, L}; w = \overline{1, W}$).

Обозначения для ограничений на доступность приборов:

s_{lb} – момент времени начала b -го интервала недоступности l -го прибора (начала ПТО) ($l = \overline{1, L}; b = \overline{1, B}$);

e_{lb} – момент времени окончания b -го интервала недоступности l -го прибора (окончания ПТО).

Через M обозначено достаточно большое число. Оценка значения M в работе не выполнялась. Оно задано равным 1000 ($M = 1000$), чтобы гарантировать:

1) положительные значения правых частей ограничений при условии, что соответствующие значения переменных решения и индикаторных переменных равны 1;

2) отрицательные значения правых частей ограничений при условии, что соответствующие значения переменных решения и индикаторных переменных равны 0.

Введены обозначения переменных, соответствующих решению задачи:

x_{ijb}^l – переменная, характеризующая распределение заданий по пакетам внутри интервалов времени доступности приборов ($x_{ijb}^l = 1$, если задание распределено под номером i в пакет, который включен под номером j в b -й интервал доступности l -го прибора, $x_{ijb}^l = 0$ в противном случае);

y_{wjb}^l – переменная, характеризующая типы заданий, распределенных по пакетам внутри интервалов времени доступности приборов ($y_{wjb}^l = 1$, если пакет, включенный под номером j в b -й интервал доступности l -го прибора, содержит задания w -го типа, $y_{wjb}^l = 0$ в противном случае);

u_{jb}^l – переменная, характеризующая включение в b -й интервал доступности l -го прибора ПЗ под номером j ($u_{jb}^l = 1$, если в b -й интервал доступности l -го прибора ПЗ включен под номером j , $u_{jb}^l = 0$ в противном случае);

q_{ijb}^l – момент времени начала реализации операций с заданием, включенным под номером i в пакет,

размещенный под номером j в b -м интервале доступности l -го прибора;

g_{jb}^l – момент времени завершения операций на l -м приборе с ПЗ, включенным под j -м номером в его b -й интервал доступности l -го прибора;

C_{\max} – момент времени завершения операций со всеми ПЗ в обрабатывающей системе (в КС).

Первым этапом формирования математической модели, используемой для оптимизации решений по назначению заданий в пакеты, по их включению в интервалы доступности приборов и по порядкам пакетов для реализации действий с ними на приборах КС, является построение выражений для определения характеристик процесса выполнения заданий. Учитывается, что количество заданий в пакетах не менее 2, а в любой b -й интервал доступности каждого l -го прибора должен быть включен хотя бы один пакет. Рассуждения строятся с учетом номеров i заданий, под которыми они включены в пакеты, размещаемые под j -ми номерами в b -х интервалах доступности приборов. Если задание включено под $(i = 1)$ -м номером в пакет, являющийся $(j = 1)$ -м в $(b = 1)$ -й интервал доступности $(l = 1)$ -го прибора, то значение q_{111}^1 определяется выражением $q_{111}^1 \geq \sum_{w=1}^W p_{1w} y_{w11}^1$. Если задание имеет $(i = 1)$ -й номер в пакете, являющемся $(j = 1)$ -м в b -м интервале доступности $(l = 1)$ -го прибора, то значение q_{11b}^1 определяется выражением:

$$q_{11b}^1 \geq e_{1,b-1} + \sum_{w=1}^W p_{1w} y_{w1b}^1, \quad (b = \overline{2, B+1}).$$

Для i -х заданий $(i = \overline{2, I})$ в j -х пакетах $(j = \overline{1, J})$, включенных в b -е интервалы доступности $(l = 1)$ -го прибора, построение выражений осуществляется на основе подхода с использованием M -больших чисел [21].

Тогда значение q_{ijb}^1 определяется выражением:

$$q_{ijb}^1 \geq q_{i-1,j,b}^1 + \sum_{w=1}^W t_{1w} y_{wjb}^1 - M \cdot (1 - x_{ijb}^1),$$

$$(i = \overline{2, I}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}).$$

В выражении предполагается, что вычисление значений q_{ijb}^1 осуществляется при условии включения соответствующего i -го задания в j -й пакет в b -м интервале доступности $(l = 1)$ -го прибора (при $x_{ijb}^1 = 1$).

Моменты времени завершения выполнения j -х пакетов в b -х интервалах доступности $(l = 1)$ -го прибора, обозначенные как g_{jb}^1 , определяются как максимумы среди моментов времени завершения операций с входящими в них заданиями:

$$g_{jb}^1 \geq q_{ijb}^1 + \sum_{w=1}^W t_{1w} y_{wjb}^1 - M \cdot (2 - u_{jb}^1 - x_{ijb}^1),$$

$$(i = \overline{1, I}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}).$$

В выражении предполагается, что вычисление значений g_{jb}^1 осуществляется при условии включения j -го пакета в b -й интервал доступности $(l = 1)$ -го прибора (при $u_{jb}^1 = 1$) и при включении соответствующего i -го задания в этот j -й пакет в b -м интервале доступности $(l = 1)$ -го прибора (при $x_{ijb}^1 = 1$).

Для $(i = 1)$ -х заданий в j -х пакетах в b -х интервалах доступности $(l = 1)$ -го прибора значения q_{1jb}^1 определяются выражением:

$$q_{1jb}^1 \geq g_{j-1,b}^1 + \sum_{w=1}^W p_{1w} y_{wjb}^1 - M \cdot (1 - u_{jb}^1),$$

$$(j = \overline{2, J}; b = \overline{1, B+1}),$$

то есть при условии, что пакет под j -м номером включен в b -й интервал доступности $(l = 1)$ -го прибора (при $u_{jb}^1 = 1$).

Значения q_{111}^1 для $(i = 1)$ -х заданий в $(j = 1)$ -х пакетах в $(b = 1)$ -х интервалах доступности l -х приборов определяются выражением:

$$q_{111}^1 \geq \max(q_{111}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w11}^{l-1}, \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w11}^l),$$

где $l = \overline{2, L}$.

В выражении первая компонента операции тах соответствует моменту времени окончания выполнения $(i = 1)$ -го задания в $(j = 1)$ -м пакете в $(b = 1)$ -м интервале доступности $(l-1)$ -го прибора, вторая компонента операции тах соответствует моменту времени окончания наладки l -го прибора на выполнение заданий в $(j = 1)$ -м пакете в $(b = 1)$ -м интервале доступности l -го прибора.

Для $(i = 1)$ -х заданий в $(j = 1)$ -х пакетах в b -х интервалах доступности l -х приборов, значение q_{11b}^l определяется выражением:

$$q_{11b}^l \geq \max(F, H),$$

где

$$F = q_{11b}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w1b}^{l-1}; H = e_{l,b-1} + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w1b}^l;$$

$$b = \overline{2, B+1}, l = \overline{2, L}.$$

В выражении, определяющем значение q_{11b}^l , первая компонента операции тах интерпретируется аналогично рассмотренному выше выражению, вторая компонента операции тах соответствует моменту времени завершения наладки l -го прибора на выполнение заданий в $(j = 1)$ -м пакете в b -м интервале его доступности после окончания $(b - 1)$ -го ПТО этого прибора.

Для i -х заданий ($i = \overline{2, I}$) в j -х пакетах ($j = \overline{2, J}$) в b -х интервалах доступности l -х приборов, значение q_{ijb}^l определяются выражением:

$$q_{ijb}^l \geq \max(G, N) - M \cdot (1 - x_{ijb}^l),$$

$$(i = \overline{2, I}; b = \overline{1, B + 1}; l = \overline{2, L}),$$

где

$$G = q_{ijb}^{l-1} + \sum_{w=1}^w t_{l-1w} y_{wj b}^{l-1}; N = q_{i-1, j, b}^l + \sum_{w=1}^w t_{lw} y_{wj b}^l.$$

Значения g_{jb}^l моментов времени окончания выполнения j -х ПЗ в b -х интервалах доступности l -х приборов определяются следующим образом:

$$g_{jb}^l \geq q_{ijb}^l + \sum_{w=1}^w t_{lw} y_{wj b}^l - M \cdot (2 - u_{jb}^l - x_{ijb}^l),$$

$$(i = \overline{2, I}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B + 1}; l = \overline{1, L}).$$

Значения q_{1jb}^l для $(i = 1)$ -х заданий в j -х пакетах, включенных в b -е интервалы доступности l -х приборов, определяются выражением:

$$q_{1jb}^l \geq \max(D, R) - M \cdot (1 - u_{jb}^l),$$

$$(j = \overline{2, J}; b = \overline{1, B + 1}; l = \overline{2, L}),$$

где

$$D = q_{1jb}^{l-1} + \sum_{w=1}^w t_{l-1w} y_{wj b}^{l-1}; R = g_{j-1, b}^l + \sum_{w=1}^w p_{lw} y_{wj b}^l.$$

Завершение операций со всеми ПЗ в КС определяется путем определения максимума среди моментов времени окончания действий с ними на L -м приборе:

$$C_{\max} \geq g_{jb}^l (j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B + 1}),$$

$$(j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B + 1}).$$

В силу того, что ПЗ должны быть выполнены строго в b -е интервалы доступности l -х приборов, для значений g_{jb}^l введены ограничения вида:

$$g_{jb}^l \leq s_{lb} (l = \overline{1, L}; b = \overline{1, B}; j = \overline{1, J}).$$

Ограничения, соответствующие включению пакетов в b -е интервалы доступности l -х приборов ($l = \overline{1, L}$):

1) задания с i -ми номерами могут быть распределены в пакеты только в том случае, если пакеты под j -ми номерами включены в b -е интервалы доступности:

$$x_{ijb}^l \leq M u_{jb}^l,$$

где $l = \overline{1, L}; b = \overline{1, B + 1}; j = \overline{1, J}; i = \overline{1, I}$;

2) в j -е пакеты ($j = \overline{1, J}$), включенные в b -е интервалы доступности l -х приборов, должно быть распределено не менее двух заданий:

$$\sum_{i=1}^I x_{ijb}^l \geq 2 - M \cdot (1 - u_{jb}^l),$$

где $l = \overline{1, L}; b = \overline{1, B + 1}; j = \overline{1, J}$;

3) в следующие друг за другом пакеты, включенные в b -е интервалы доступности l -приборов, распределены задания разных типов:

$$y_{wjb}^l + y_{w, j+1, b}^l \leq 1,$$

где $l = \overline{1, L}; b = \overline{1, B + 1}; j = \overline{1, J - 1}; w = \overline{1, W}$;

4) в каждом b -м интервале доступности размещается не менее одного ПЗ:

$$\sum_{j=1}^J u_{jb}^l \geq 1,$$

где $l = \overline{1, L}; b = \overline{1, B + 1}$;

5) количество ПЗ в b -м интервале доступности l -го прибора равно количеству ПЗ в этом же интервале доступности $(l + 1)$ -го прибора:

$$\sum_{j=1}^J u_{jb}^l = \sum_{j=1}^J u_{jb}^{l+1},$$

где $b = \overline{1, B + 1}; l = \overline{1, L - 1}$;

6) количество заданий в пакете с j -м номером в b -м интервале доступности l -го и $(l + 1)$ -го прибора является одинаковым:

$$\sum_{i=1}^I x_{ijb}^l = \sum_{i=1}^I x_{ijb}^{l+1},$$

где $j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B + 1}; l = \overline{1, L - 1}$;

7) пакет, включенный под j -м номером в b -й интервал доступности l -го прибора, может содержать задания только одного w -го типа, и эти задания могут быть добавлены в этот пакет в случае, если он включен в этот b -й интервал:

$$\sum_{w=1}^W y_{wjb}^l = u_{jb}^l,$$

где $j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B + 1}; l = \overline{1, L - 1}$.

Построение дополнительных ограничений, соответствующих распределению заданий по пакетам, реализовано на основе подхода к их синтезу с использованием логических условий [21].

Вид условия: если задание содержится под $(i + 1)$ -м номером в пакете, включенном под j -м номером в b -й интервал доступности l -го прибора ($x_{i+1, j, b}^l = 1$), то в этом же пакете должно содержаться задание с i -м номером ($x_{ijb}^l = 1$).

Вид логического условия:

ЕСЛИ $x_{i+1, j, b}^l = 1$,

ТО $x_{ijb}^l = 1$ ($i = \overline{1, I - 1}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B + 1}; l = \overline{1, L}$).

Это условие в виде ограничений интерпретируется следующим образом:

$$x_{ijb}^l - x_{i+1,jb}^l \geq 0, \\ (i = \overline{1, I-1}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L}).$$

Аналогичные рассуждения использованы применительно к ПЗ, включенным под j -м и $(j+1)$ -м номерами в b -е интервалы доступности l -х приборов.

В результате получены ограничения:

$$u_{jb}^l - u_{j+1,b}^l \geq 0, \\ (j = \overline{1, J-1}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L}).$$

Для ограничений, определяющих требование включения в пакеты всех заданий каждого w -го типа в количестве N^w , введены переменные v_{iwjb}^l ($i = \overline{1, I}; w = \overline{1, W}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L}$):

$$v_{iwjb}^l = 1, \text{ если } y_{wjb}^l x_{ijb}^l = 1,$$

то есть i -е задание из пакета, включенного с j -м номером в b -й интервал доступности l -го прибора, относится к w -му типу; $v_{iwjb}^l = 0$, если $y_{wjb}^l x_{ijb}^l = 0$ (i -е задание из пакета, включенного с j -м номером в b -й интервал доступности l -го прибора, не относится к w -му типу).

Для ограничений вида $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b$ в [21] введена переменная y : $y = 1$, если ограничение выполняется; $y = 0$ – если нет. Определение значений y осуществляется в [21] выражениями вида:

$$f(x_1, x_1, \dots, x_1) \leq b + M \cdot (1 - y), \\ f(x_1, x_1, \dots, x_1) \geq b + 1 - My.$$

Введем ограничения вида $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b$, которые позволяли бы контролировать типизацию заданий, распределенных по пакетам.

Для определения значений переменной y при выполнении / не выполнении ограничения вида $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b$, получены соответствующие выражения:

$$f(x_1, x_1, \dots, x_1) \geq b - M \cdot (1 - y), \\ f(x_1, x_1, \dots, x_1) \leq b - 1 + My. \quad (1)$$

В рассмотрение введена индикаторная переменная v_{iwjb}^l , значения которой определяются следующим образом:

1) если i -е задание назначено в состав в j -го пакета, включенного в b -й интервал доступности l -го прибора ($x_{ijb}^l = 1$), и в этот j -й пакет в b -м интервале доступности l -го прибора назначаются задания w -го типа ($y_{wjb}^l = 1$), то $v_{iwjb}^l = 1$;

2) если i -е задание назначено в состав в j -го пакета, включенного в b -й интервал доступности l -го прибора ($x_{ijb}^l = 1$), но в этот j -й пакет в b -м интервале доступности l -го прибора не назначаются задания w -го типа ($y_{wjb}^l = 0$), либо в j -й пакет в b -м

интервале доступности l -го прибора назначаются задания w -го типа ($y_{wjb}^l = 1$), но i -е задание не назначено в состав в j -го пакета в этом в b -м интервале доступности l -го прибора ($x_{ijb}^l = 0$), то $v_{iwjb}^l = 0$.

Таким образом, при условии $y_{wjb}^l x_{ijb}^l = 1$ значение индикаторной переменной $v_{iwjb}^l = 1$, а при условии $y_{wjb}^l x_{ijb}^l = 0$ – соответственно, $v_{iwjb}^l = 0$.

Тогда для условий: $v_{iwjb}^l = 1$ при $y_{wjb}^l x_{ijb}^l = 1$ и $v_{iwjb}^l = 0$ при $y_{wjb}^l x_{ijb}^l = 0$, на основе (1) получены ограничения:

$$y_{wjb}^l x_{ijb}^l \geq 1 - M \cdot (1 - v_{iwjb}^l), \\ y_{wjb}^l x_{ijb}^l \leq M v_{iwjb}^l, \\ (i = \overline{1, I}; w = \overline{1, W}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L}).$$

В целом использование переменных v_{iwjb}^l позволяет контролировать общее количество заданий каждого типа, распределенных по пакетам.

Выражения, определяющие условия включения в состав пакетов всех заданий каждого w -го типа в количестве N^w на каждом l -м приборе, имеют вид:

$$\sum_{b=1}^{B+1} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I v_{iwjb}^l = N^w; w = \overline{1, W}; l = \overline{1, L}.$$

Итоговый вид модели оптимизации назначения заданий в пакеты и включения последних в интервалы доступности приборов:

1) целевая функция:

$$\min C_{\max}; \quad (2)$$

2) ограничения:

$$\sum_{i=1}^I x_{ijb}^l \geq 2 - M \cdot (1 - u_{jb}^l), \\ l = \overline{1, L}; b = \overline{1, B+1}; j = \overline{1, J}; \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^I x_{ijb}^l \leq M u_{jb}^l, l = \overline{1, L}; b = \overline{1, B+1}; j = \overline{1, J}; \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^J u_{jb}^l \geq 1, l = \overline{1, L}; b = \overline{1, B+1}; \quad (5)$$

$$\sum_{w=1}^W y_{wjb}^l = u_{jb}^l, j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L}; \quad (6)$$

$$y_{wjb}^l + y_{w,j+1,b}^l \leq 1, \\ l = \overline{1, L}; b = \overline{1, B+1}; j = \overline{1, J-1}; w = \overline{1, W}; \quad (7)$$

$$x_{ijb}^l - x_{i+1,jb}^l \geq 0, \\ i = \overline{1, I-1}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L}; \quad (8)$$

$$u_{jb}^l - u_{j+1,b}^l \geq 0, \\ j = \overline{1, J-1}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L}; \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^J u_{jb}^l = \sum_{j=1}^J u_{jb}^{l+1}, b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L-1}; \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^I x_{ijb}^l = \sum_{i=1}^I x_{ijb}^{l+1}, \quad j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L-1}; \quad (11)$$

$$y_{wjb}^l x_{ijb}^l \geq 1 - M \cdot (1 - v_{iwb}^l), \quad y_{wjb}^l x_{ijb}^l \leq M v_{iwb}^l, \quad i = \overline{1, I}; w = \overline{1, W}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L}; \quad (12)$$

$$\sum_{b=1}^{B+1} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I v_{iwb}^l = N^w, w = \overline{1, W}; l = \overline{1, L}; \quad (13)$$

$$q_{111}^1 \geq \sum_{w=1}^W p_{1w} y_{w11}^1; \quad (14)$$

$$q_{11b}^1 \geq e_{1,b-1} + \sum_{w=1}^W p_{1w} y_{w1b}^1, b = \overline{2, B+1} \quad (15)$$

$$q_{1jb}^1 \geq g_{j-1,b}^1 + \sum_{w=1}^W p_{1w} y_{w1b}^1 - M \cdot (1 - u_{jb}^1), \quad j = \overline{2, J}; b = \overline{1, B+1}; \quad (16)$$

$$q_{ijb}^1 \geq q_{i-1,j,b}^1 + \sum_{w=1}^W t_{1w} y_{wjb}^1 - M \cdot (1 - x_{ijb}^1), \quad i = \overline{2, I}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; \quad (17)$$

$$g_{jb}^l \geq q_{ijb}^l + \sum_{w=1}^W t_{lw} y_{wjb}^l - M \cdot (2 - u_{jb}^l - x_{ijb}^l), \quad i = \overline{1, I}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L}; \quad (18)$$

$$q_{111}^l \geq \max(q_{111}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w11}^{l-1}; \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w11}^l), \quad l = \overline{2, L}; \quad (19)$$

$$q_{11b}^l \geq \max(q_{11b}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w1b}^{l-1}; e_{1,b-1} + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w1b}^l); \quad b = \overline{2, B+1}; l = \overline{2, L}; \quad (20)$$

$$q_{1jb}^l \geq \max(q_{1jb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb}^{l-1}, \quad (21)$$

$$g_{j-1,b}^l + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{wjb}^l) - M \cdot (1 - u_{jb}^l), \quad j = \overline{2, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{2, L};$$

$$q_{ijb}^l \geq \max(q_{ijb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb}^{l-1}, \quad (22)$$

$$q_{i-1,j,b}^l + \sum_{w=1}^W t_{lw} y_{wjb}^l) - M \cdot (1 - x_{ijb}^l), \quad i = \overline{2, I}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{2, L};$$

$$C_{\max} \geq g_{jb}^l, j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; \quad (23)$$

$$g_{jb}^l \leq s_{lb}, l = \overline{1, L}; b = \overline{1, B}; j = \overline{1, J}; \quad (24)$$

$$q_{ijb}^l \geq 0; g_{jb}^l \geq 0; i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L} \quad (25)$$

$$x_{ijb}^l \in \{0,1\}, y_{wjb}^l \in \{0,1\}, u_{jb}^l \in \{0,1\}, v_{iwb}^l \in \{0,1\}, \quad i = \overline{1, I}; w = \overline{1, W}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L}. \quad (26)$$

Линеаризация математической модели оптимизации

Модель (2-26) является моделью нелинейного программирования. Нелинейными являются выражения (12) и (19-22). Для линеаризации (12) введены переменные z_{iwb}^l :

$$z_{iwb}^l = y_{wjb}^l x_{ijb}^l, \quad (i = \overline{1, I}; w = \overline{1, W}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L}).$$

Замена произведения $y_{wjb}^l x_{ijb}^l$ на z_{iwb}^l в (12) обеспечивается ограничениями [22]:

$$z_{iwb}^l \leq y_{wjb}^l; z_{iwb}^l \leq x_{ijb}^l; z_{iwb}^l \geq y_{wjb}^l + x_{ijb}^l - 1; \quad z_{iwb}^l \in \{0,1\}.$$

С целью линеаризации (19) введены переменные $m_l (l = \overline{2, L})$:

- $m_l = 1$, если наладка l -го прибора на действия с заданиями в пакете с $(j = 1)$ -м номером в $(b = 1)$ -м интервале доступности l -го прибора завершилась не позже, чем окончание выполнения $(i = 1)$ -го задания в пакете с $(j = 1)$ -м номером в $(b = 1)$ -м интервале доступности $(l - 1)$ -го прибора;
- $m_l = 0$ в противном случае.

Определение значений переменных $m_l (l = \overline{2, L})$ и значений характеристик $q_{111}^l (l = \overline{2, L})$ процесса выполнения ПЗ в КС осуществляется посредством введения в модель следующих выражений (27-30), представляющих собой линеаризацию (19).

Для линеаризации (20) введены переменные $m_b^l (l = \overline{2, L}; b = \overline{2, B+1})$:

- $m_b^l = 1$, если наладка l -го прибора на проведение операций с заданиями в $(j = 1)$ -м пакете в b -м интервале доступности l -го прибора после окончания его $(b - 1)$ -го ПТО закончилась не позже окончания выполнения $(i = 1)$ -го задания в $(j = 1)$ -м пакете в b -м интервале доступности $(l - 1)$ -го прибора;
- $m_b^l = 0$ в противном случае.

$$[\sum_{w=1}^W p_{lw}y_{w11}^l - (q_{111}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w}y_{w11}^{l-1})] + Mm_l \geq 0, \quad l = \overline{2, L}. \quad (27)$$

$$[(q_{111}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w}y_{w11}^{l-1}) - \sum_{w=1}^W p_{lw}y_{w11}^l] + M(1 - m_l) \geq 0, \quad l = \overline{2, L}. \quad (28)$$

$$q_{111}^l \geq (q_{111}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w}y_{w11}^{l-1}) - M \cdot (2 - u_{11}^l - m_l). \quad (29)$$

$$q_{111}^l \geq \sum_{w=1}^W p_{lw}y_{w11}^l - M(1 - u_{11}^l + m_l), \quad l = \overline{2, L}. \quad (30)$$

Определение значений переменных m_b^l и, соответственно, значений характеристик процесса выполнения ПЗ в КС (q_{11b}^l), осуществляется посредством введения в модель следующих выражений (31–34), представляющих собой линеаризацию (20).

Для линеаризации (21) введены переменные m_{jb}^l :
 – $m_{jb}^l = 1$, если после окончания выполнения ПЗ с $(j - 1)$ -м номером в b -м интервале доступности l -го прибора наладка на проведение операций с заданиями в j -м пакете в этом же интервале до-

ступности l -го прибора закончилась не позже окончания выполнения $(i = 1)$ -го задания в пакете с j -м номером в b -м интервале доступности $(l - 1)$ -го прибора;

– $m_{jb}^l = 0$ в противном случае.

Определение значений переменных m_{jb}^l и, соответственно, значений характеристик процесса выполнения ПЗ в КС (q_{1jb}^l) осуществляется посредством введения в модель выражений (35–38), представляющих собой линеаризацию (21).

$$[(e_{l,b-1} + \sum_{w=1}^W p_{lw}y_{w1b}^l) - (q_{11b}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w}y_{w1b}^{l-1})] + Mm_b^l \geq 0, \quad b = \overline{2, B+1}; \quad l = \overline{2, L}. \quad (31)$$

$$[(q_{11b}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w}y_{w1b}^{l-1}) - (e_{l,b-1} + \sum_{w=1}^W p_{lw}y_{w1b}^l)] + M \cdot (1 - m_b^l) \geq 0, \quad b = \overline{2, B+1}; \quad l = \overline{2, L}. \quad (32)$$

$$q_{11b}^l \geq (q_{11b}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w}y_{w1b}^{l-1}) - M \cdot (2 - u_{1b}^l - m_b^l). \quad (33)$$

$$q_{11b}^l \geq (e_{l,b-1} + \sum_{w=1}^W p_{lw}y_{w1b}^l) - M(1 - u_{1b}^l + m_b^l), \quad b = \overline{2, B+1}; \quad l = \overline{2, L}. \quad (34)$$

$$[(g_{j-1,b}^l + \sum_{w=1}^W p_{lw}y_{wj1b}^l) - (q_{1jb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w}y_{wj1b}^{l-1})] + Mm_{jb}^l \geq 0, \quad j = \overline{2, J}; \quad b = \overline{1, B+1}; \quad l = \overline{2, L}. \quad (35)$$

$$[(q_{1jb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w}y_{wj1b}^{l-1}) - (g_{j-1,b}^l + \sum_{w=1}^W p_{lw}y_{wj1b}^l)] + M(1 - m_{jb}^l) \geq 0, \quad j = \overline{2, J}; \quad b = \overline{1, B+1}; \quad l = \overline{2, L}. \quad (36)$$

$$q_{1jb}^l \geq (q_{1jb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w}y_{wj1b}^{l-1}) - M \cdot (2 - u_{jb}^l - m_{jb}^l), \quad j = \overline{2, J}; \quad b = \overline{1, B+1}; \quad l = \overline{2, L}. \quad (37)$$

$$q_{1jb}^l \geq (g_{j-1,b}^l + \sum_{w=1}^W p_{lw}y_{wj1b}^l) - M \cdot (1 - u_{jb}^l + m_{jb}^l), \quad j = \overline{2, J}; \quad b = \overline{1, B+1}; \quad l = \overline{2, L}. \quad (38)$$

Для линеаризации (22) в рассмотрение введены переменные m_{ijb}^l :

– $m_{ijb}^l = 1$, если действия с $(i-1)$ -м заданием в j -м пакете в b -м интервале доступности l -го прибора завершились не позже завершения действий с i -м заданием в j -м пакете в b -м интервале доступности $(l-1)$ -го прибора;

– $m_{ijb}^l = 0$ в противном случае.

Определение значений переменных m_{ijb}^l и, соответственно, значений характеристик процесса выполнения ПЗ в КС (q_{ijb}^l), осуществляется посредством введения в модель выражений (39–42), представляющих собой линеаризацию выражений (22).

$$[(q_{i-1,j,b}^l + \sum_{w=1}^W t_{lw} y_{wjb}^l) - (q_{ijb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb}^{l-1})] + M m_{ijb}^l \geq 0, \quad i = \overline{2, I}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{2, L}. \quad (39)$$

$$[(q_{ijb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb}^{l-1}) - (q_{i-1,j,b}^l + \sum_{w=1}^W t_{lw} y_{wjb}^l)] + M(1 - m_{ijb}^l) \geq 0, \quad i = \overline{2, I}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{2, L}. \quad (40)$$

$$q_{ijb}^l \geq (q_{ijb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb}^{l-1}) - M \cdot (2 - x_{ijb}^l - m_{ijb}^l). \quad (41)$$

$$q_{ijb}^l \geq (q_{i-1,j,b}^l + \sum_{w=1}^W t_{lw} y_{wjb}^l) - M \cdot (1 - x_{ijb}^l + m_{ijb}^l), \quad i = \overline{2, I}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{2, L}. \quad (42)$$

С учетом введенных переменных и выражений (27–42), позволяющих исключить нелинейные выражения (19–22), заменив их на линейные, получен итоговый вид модели MILP, посредством которой оптимизируются решения по назначению заданий в пакеты, включению пакетов в интервалы доступности приборов КС и порядкам выполнения пакетов в интервалах доступности:

1) целевая функция:

$$\min C_{\max}; \quad (43)$$

2) ограничения:

$$\sum_{i=1}^I x_{ijb}^l \geq 2 - M \cdot (1 - u_{jb}^l), \quad (44)$$

$$l = \overline{1, L}; b = \overline{1, B+1}; j = \overline{1, J};$$

$$\sum_{i=1}^I x_{ijb}^l \leq M u_{jb}^l, \quad l = \overline{1, L}; b = \overline{1, B+1}; j = \overline{1, J}; \quad (45)$$

$$\sum_{j=1}^J u_{jb}^l \geq 1, \quad l = \overline{1, L}; b = \overline{1, B+1}; \quad (46)$$

$$\sum_{w=1}^W y_{wjb}^l = u_{jb}^l, \quad j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L}; \quad (47)$$

$$y_{wjb}^l + y_{w,j+1,b}^l \leq 1, \quad (48)$$

$$l = \overline{1, L}; b = \overline{1, B+1}; j = \overline{1, J-1}; w = \overline{1, W};$$

$$x_{ijb}^l - x_{i+1,jb}^l \geq 0, \quad (49)$$

$$i = \overline{1, I-1}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L};$$

$$u_{jb}^l - u_{j+1,b}^l \geq 0, \quad j = \overline{1, J-1}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L}; \quad (50)$$

$$\sum_{j=1}^J u_{jb}^l = \sum_{j=1}^J u_{jb}^{l+1}, \quad b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L-1}; \quad (51)$$

$$\sum_{i=1}^I x_{ijb}^l = \sum_{i=1}^I x_{ijb}^{l+1}, \quad (52)$$

$$j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L-1};$$

$$z_{iwb}^l \geq 1 - M \cdot (1 - v_{iwb}^l), \quad (53)$$

$$z_{iwb}^l \leq M v_{iwb}^l,$$

$$i = \overline{1, I}; w = \overline{1, W}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L};$$

$$\sum_{b=1}^{B+1} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I v_{iwb}^l = N^w, \quad w = \overline{1, W}; l = \overline{1, L}; \quad (54)$$

$$z_{iwb}^l \leq y_{wjb}^l, z_{iwb}^l \leq x_{ijb}^l, z_{iwb}^l \geq y_{wjb}^l + x_{ijb}^l - 1, \quad (55)$$

$$i = \overline{1, I}; w = \overline{1, W}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L};$$

$$q_{111}^1 \geq \sum_{w=1}^W p_{1w} y_{w11}^1 - M \cdot (1 - u_{11}^1); \quad (56)$$

$$q_{11b}^1 \geq e_{1,b-1} + \sum_{w=1}^W p_{1w} y_{w1b}^1 - M \cdot (1 - u_{1b}^1), \quad (57)$$

$$b = \overline{2, B+1};$$

$$q_{1jb}^1 \geq g_{j-1,b}^1 + \sum_{w=1}^W p_{1w} y_{w1b}^1 - M \cdot (1 - u_{jb}^1), \quad (58)$$

$$j = \overline{2, J}; b = \overline{1, B+1};$$

$$q_{ijb}^1 \geq q_{i-1,j,b}^1 + \sum_{w=1}^W t_{1w} y_{wjb}^1 - M \cdot (1 - x_{ijb}^1), \quad (59)$$

$$i = \overline{2, I}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1};$$

$$g_{jb}^l \geq q_{ijb}^l + \sum_{w=1}^W t_{lw} y_{wjb}^l - M \cdot (2 - u_{jb}^l - x_{ijb}^l), \quad (60)$$

$$i = \overline{1, I}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L};$$

$$[\sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w11}^l - (q_{111}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w11}^{l-1})] + M m_l \geq 0, \quad (61)$$

$$l = \overline{2, L};$$

$$[(q_{111}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w11}^{l-1}) - \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w11}^l] +$$

$$+ M(1 - m_l) \geq 0, \quad l = \overline{2, L}; \quad (62)$$

$$q_{111}^l \geq (q_{111}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w11}^{l-1}) - M \cdot (2 - u_{11}^l - m_l), \quad (63)$$

$$q_{111}^l \geq \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w11}^l - M(1 - u_{11}^l + m_l), \quad l = \overline{2, L}; \quad (64)$$

$$[(e_{l,b-1} + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w1b}^l) - (q_{11b}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w1b}^{l-1})] +$$

$$+ M m_b^l \geq 0, \quad b = \overline{2, B+1}; l = \overline{2, L}; \quad (65)$$

$$[(q_{11b}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w1b}^{l-1}) -$$

$$- (e_{l,b-1} + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w1b}^l)] + M \cdot (1 - m_b^l) \geq 0, \quad (66)$$

$$b = \overline{2, B+1}; l = \overline{2, L};$$

$$q_{11b}^l \geq (q_{11b}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{w1b}^{l-1}) -$$

$$- M \cdot (2 - u_{1b}^l - m_b^l), \quad (67)$$

$$q_{11b}^l \geq (e_{l,b-1} + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{w1b}^l) - M(1 - u_{1b}^l + m_b^l), \quad (68)$$

$$b = \overline{2, B+1}; l = \overline{2, L};$$

$$[(g_{j-1,b}^l + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{wjb}^l) -$$

$$(q_{1jb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb}^{l-1})] + M m_{jb}^l \geq 0 \quad (69)$$

$$j = \overline{2, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{2, L};$$

$$[(q_{1jb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb}^{l-1}) -$$

$$(g_{j-1,b}^l + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{wjb}^l)] + M(1 - m_{jb}^l) \geq 0, \quad (70)$$

$$j = \overline{2, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{2, L};$$

$$q_{1jb}^l \geq (q_{1jb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb}^{l-1}) -$$

$$- M \cdot (2 - u_{jb}^l - m_{jb}^l), \quad (71)$$

$$j = \overline{2, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{2, L};$$

$$q_{1jb}^l \geq (g_{j-1,b}^l + \sum_{w=1}^W p_{lw} y_{wjb}^l) -$$

$$- M \cdot (1 - u_{jb}^l + m_{jb}^l), \quad (72)$$

$$j = \overline{2, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{2, L};$$

$$[(q_{i-1,j,b}^l + \sum_{w=1}^W t_{lw} y_{wjb}^l) - (q_{ijb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb}^{l-1})] +$$

$$+ M m_{ijb}^l \geq 0, \quad (73)$$

$$i = \overline{2, I}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{2, L};$$

$$[(q_{ijb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb}^{l-1}) - (q_{i-1,j,b}^l + \sum_{w=1}^W t_{lw} y_{wjb}^l)] +$$

$$+ M(1 - m_{ijb}^l) \geq 0, \quad (74)$$

$$i = \overline{2, I}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{2, L};$$

$$q_{ijb}^l \geq (q_{ijb}^{l-1} + \sum_{w=1}^W t_{l-1w} y_{wjb}^{l-1}) - M \cdot (2 - x_{ijb}^l - m_{ijb}^l), \quad (75)$$

$$q_{ijb}^l \geq (q_{i-1,j,b}^l + \sum_{w=1}^W t_{lw} y_{wjb}^l) - M \cdot (1 - x_{ijb}^l + m_{ijb}^l), \quad (76)$$

$$i = \overline{2, I}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{2, L};$$

$$C_{\max} \geq g_{j,B+1}^l, \quad j = \overline{1, J}; \quad (77)$$

$$g_{jb}^l \leq s_{lb}, \quad j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B}; l = \overline{2, L}; \quad (78)$$

$$g_{j,B+1}^l \geq e_{lB}, \quad j = \overline{1, J}; l = \overline{2, L}; \quad (79)$$

$$q_{ijb}^l \geq 0; \quad g_{jb}^l \geq 0; \quad (80)$$

$$i = \overline{1, I}; j = \overline{1, J}; b = \overline{1, B+1}; l = \overline{1, L};$$

$$x_{ijb}^l \in \{0,1\}, y_{wjb}^l \in \{0,1\}, u_{jb}^l \in \{0,1\}, v_{iwb}^l \in \{0,1\}; \quad (81)$$

$$z_{iwb}^l \in \{0,1\}, i = \overline{1, I}, w = \overline{1, W}, j = \overline{1, J},$$

$$b = \overline{1, B+1}, l = \overline{1, L}; \quad (82)$$

$$m_l \in \{0,1\}, m_b^l \in \{0,1\}, m_{jb}^l \in \{0,1\}, j = \overline{2, J},$$

$$b = \overline{1, B+1}, l = \overline{2, L}; \quad (83)$$

$$m_{ijb}^l \in \{0,1\}, i = \overline{2, I}, j = \overline{1, J}, b = \overline{1, B+1}, l = \overline{2, L}. \quad (84)$$

Исследование модели MILP оптимизации

Для исследования предложенной модели MILP (43–84) разработано приложение в пакете IBM ILOG CPLEX. В интересах исследования рассмотрены задачи поиска эффективных решений по назначению заданий в состав пакетов, включению ПЗ в интервалы доступности l -х приборов, порядков пакетов для проведения операций с ними на приборах КС в рамках этих интервалов.

Исследования проводились для параметров модели, которые обобщены в виде отношений времени выполнения заданий i -го и i' -го типов на l -х приборах:

$$\max(t_{li'})/\min(t_{li'})$$

и наладки приборов на их выполнение:

$$\max(t_{li'})/\min(t_{li'}).$$

Значения отношений:

$$\begin{aligned} \max(t_{li'})/\min(t_{li'}) &\in \{1, 2, 4\}, \\ \max(t_{li'})/\min(t_{li'}) &\in \{1, 2, 4, 8\}. \end{aligned}$$

Заданы $W = 4$ и $N^w = 12$ ($w = \overline{1,4}$). Исследования выполнялись при $L = 2$ и $L = 3$. Заданы интервалы недоступности приборов $[s_{1b}; e_{1b}]$ при $L = 2$ и $L = 3$,

$B = 1$ и $B = 2$. В качестве результатов зафиксированы значения критерия C_{\max} . Значения параметров модели, используемые в исследованиях при $L = 2$ и $L = 3$, и результаты исследований представлены в таблице 1. Результаты исследований обобщены в виде графиков (рисунок 1). Полученные в ходе исследований результаты показали, что сформированная модель MILP позволяет оптимизировать решения по распределению заданий по пакетам, включению полученных пакетов в интервалы доступности приборов и упорядочивать их выполнение внутри этих интервалов доступности.

Результаты показали, что при линейном сдвиге интервалов времени недоступности приборов (с постоянным временным шагом) для разных значений отношения $\max(t_{li'})/\min(t_{li'})$ фиксируется линейный характер увеличения значений критерия C_{\max} .

Использование модели позволяет получать решения при количестве приборов $L = 3$, количестве типов заданий $W = 4$, количестве заданий каждого типа $N^w = 12$ и количестве ПТО приборов $B = 2$. При этом модель позволяет получать результаты как для перекрывающихся, так и для неперекрывающихся интервалов недоступности приборов.

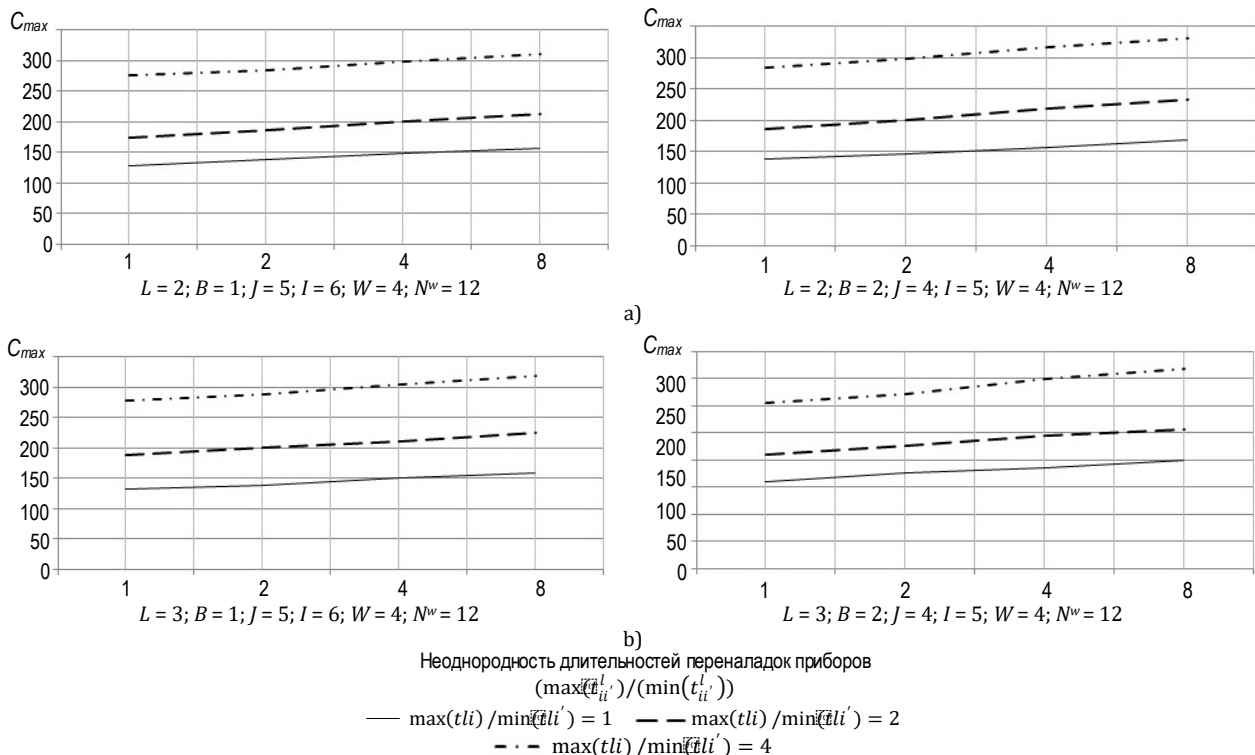


Рис. 1. Зависимости значений C_{\max} от параметров модели при $L = 2$ (а) и $L = 3$ (б)

Fig. 1. Dependences of C_{\max} Values on Model Parameters at $L = 2$ (a) and $L = 3$ (b)

ТАБЛИЦА 1. Значения параметров, использованных в моделях при $L = 2$ и $L = 3$, и полученные результаты
TABLE 1. The Values of the Parameters Used in the Models at $L = 2$ and $L = 3$, and the Results Obtained

$\frac{\max(t_{l'}^l)}{\min(t_{l'}^l)}$	$\frac{\max(t_{l'})}{\min(t_{l'})}$	$L = 2$			$L = 3$			
		Интервалы недоступности		C_{\max}	Интервалы недоступности			C_{\max}
		$(l = 1)$ -го прибора $[s_{1b}; e_{1b}]$	$(l = 2)$ -го прибора $[s_{2b}; e_{2b}]$		$(l = 1)$ -го прибора $[s_{1b}; e_{1b}]$	$(l = 2)$ -го прибора $[s_{2b}; e_{2b}]$	$(l = 3)$ -го прибора $[s_{3b}; e_{3b}]$	
$L = 2, B = 1, J = 5, I = 6, W = 4, N^w = 12$					$L = 3, B = 1, J = 5, I = 6, W = 4, N^w = 12$			
1	1	[60;67]	[65;72]	128	[60;67]	[65;72]	[70;77]	132
	2	[70;77]	[75;82]	137	[70;77]	[75;82]	[80;87]	141
	4	[80;87]	[85;92]	148	[80;87]	[85;92]	[90;97]	152
	8	[90;97]	[95;102]	157	[90;97]	[95;102]	[100;107]	161
2	1	[70;77]	[80;87]	173	[70;77]	[80;87]	[90;97]	187
	2	[80;87]	[90;92]	185	[80;87]	[90;92]	[100;107]	200
	4	[90;97]	[100;107]	201	[90;97]	[100;107]	[110;117]	211
	8	[100;107]	[110;117]	212	[100;107]	[110;117]	[120;127]	225
4	1	[120;127]	[130;137]	273	[120;127]	[130;137]	[145;152]	278
	2	[130;137]	[140;147]	283	[130;137]	[140;147]	[155;162]	289
	4	[140;147]	[150;157]	298	[145;152]	[155;162]	[165;172]	308
	8	[160;167]	[170;177]	310	[160;167]	[170;177]	[180;187]	320
$L = 2, B = 2, J = 4, I = 5, W = 4, N^w = 12$					$L = 3, B = 2, J = 4, I = 5, W = 4, N^w = 12$			
1	1	[40;47];[80;87]	[45;52];[85;92]	139	[40;47];[80;87]	[45;52];[85;92]	[50;57];[90;97]	160
	2	[45;52];[90;97]	[50;57];[95;102]	146	[45;52];[90;97]	[50;57];[95;102]	[55;62];[100;107]	176
	4	[50;57];[100;107]	[55;62];[105;112]	157	[50;57];[100;107]	[55;62];[105;112]	[60;67];[110;117]	186
	8	[55;62];[110;117]	[60;67];[115;122]	168	[55;62];[110;117]	[60;67];[115;122]	[65;72];[120;127]	200
2	1	[50;57];[110;117]	[60;67];[120;127]	185	[50;57];[110;117]	[60;67];[120;127]	[70;77];[130;137]	209
	2	[60;67];[120;127]	[70;77];[130;137]	200	[60;67];[120;127]	[70;77];[130;137]	[80;87];[140;147]	227
	4	[65;72];[130;137]	[75;82];[140;147]	219	[65;72];[130;137]	[75;82];[140;147]	[85;92];[150;157]	244
	8	[75;82];[140;147]	[85;92];[150;157]	233	[75;82];[140;147]	[85;92];[150;157]	[95;102];[160;167]	256
4	1	[80;87];[170;177]	[90;97];[180;187]	283	[80;87];[170;177]	[90;97];[180;187]	[100;107];[190;197]	305
	2	[90;97];[180;187]	[100;107];[190;197]	298	[90;97];[180;187]	[100;107];[190;197]	[110;117];[200;207]	323
	4	[100;107];[200;207]	[110;117];[210;217]	316	[100;107];[200;207]	[110;117];[210;217]	[120;127];[220;227]	349
	8	[110;117];[210;217]	[120;127];[220;227]	330	[110;117];[210;217]	[120;127];[220;227]	[130;137];[230;237]	368

Заключение

С целью поддержания приборов в процессе функционирования в работоспособном состоянии, исключения отказов приборов со значительными длительностями их восстановления, уменьшения количества отказов приборов с малыми длительностями восстановления реализуется их (приборов) предварительное техническое обслуживание, что позволяет устранять неполадки и обеспечивает (при исключении отказов со значительными длительностями восстановления приборов и уменьшении количества отказов с малыми длительностями восстановления) увеличение общей производительности процессов выполнения заданий в КС. Особенностью рассмотренной в работе задачи является необходимость учета ПТО приборов,

выполняемого через заданные фиксированные интервалы времени, а также необходимость выполнения однотипных заданий в составе пакетов. Для решения задач указанного вида с незначительной размерностью их параметров в первую очередь разработана модель нелинейного программирования, которая затем линейаризована с целью увеличения производительности процесса вычислений. Использование указанной модели позволяет оптимизировать распределение заданий по пакетам, включение пакетов в интервалы доступности приборов и порядок выполнения пакетов на приборах внутри интервалов доступности.

В отличие от большинства существующих моделей и методов, полученная модель позволяет:

1) оптимизировать составы пакетов для их последовательного выполнения на приборах;

2) учитывать при оптимизации способ расчета временных характеристик процессов, предусматривающий передачу заданий из пакетов с предыдущего прибора на последующий непосредственно в момент времени завершения их выполнения на первом из указанных приборов;

3) включать пакеты в интервалы доступности приборов и упорядочивать их внутри этих интервалов доступности.

Сформированы новые обобщенные выражения, позволяющие определять значения индикаторных переменных при выполнении / не выполнении условий превышения значениями функции заданных граничных значений. На основе этих выражений и введенных в модель индикаторных переменных сформированы ограничения, обеспечивающие включения всех заданий разных типов в различные

пакеты внутри интервалов доступности приборов. Указанные результаты также являются особенностями сформированной модели и дальнейшим развитием способов построения моделей MILP решения оптимизационных задач.

Проведенные исследования показали, что с использованием предложенной модели могут быть оптимизированы рассматриваемые решения при условии как перекрывающихся, так и неперекрывающихся интервалов недоступности приборов. Полученные результаты показали работоспособность разработанной модели MILP при оптимизации рассматриваемых решений. Сформированная в работе модель MILP может быть использована при планировании процессов в гибких производственных системах конвейерного типа, реализующих выпуск широкой номенклатуры деталей, при учете ПТО их приборов.

Список источников

1. Кротов К.В. Модели смешанного целочисленного линейного программирования оптимизации включения заданий в пакеты и порядков проведения операций с ними в конвейерных системах // Информационно-управляющие системы. 2024. № 6. С. 46–57. DOI:10.31799/1684-8853-2024-6-46-57. EDN:EFCACX
2. Aghezzaf E.-H., Khatab A., Tam P.L. Optimizing production and imperfect preventive maintenance planning's integration in failure-prone manufacturing systems // Reliability Engineering and System Safety. 2016. Vol. 145. PP. 190–198. DOI:10.1016/j.ress.2015.09.017. EDN:VENHRR
3. Tam P.L., Aghezzaf E.-H., Khatab A., Le C.H. Integrated Production and Imperfect Preventive Maintenance Planning An Effective MILP-based Relax-and-Fix/Fix-and-Optimize Method // Proceedings of the 6th International Conference on Operations Research and Enterprise Systems (ICORES 2017, Porto, Portugal, 23–25 February 2017). 2017. Vol. 1. PP. 483–490. DOI:10.5220/0006285504830490
4. Shehni A.A., Cheaitou A., Alsyoud I. Integrated Production and Maintenance Planning: A Comparison Between Block Policies // Proceedings of the 10th International Conference on Industrial Engineering and Operations Management (Dubai, UAE, 10–12 March 2020). PP. 1765–1773. URL: <https://www.ieomsociety.org/ieom2020/papers/300.pdf> (Accessed 08.12.2025)
5. Moghaddam K.S. A Multi-Objective Modeling Approach for Integrated Manufacturing and Preventive Maintenance Planning // Operations and Supply Chain Management. 2021. Vol. 14. Iss. 1. PP. 83–99. DOI:10.31387/oscm0440288
6. Hosseini S.M.H. Modeling the hybrid flow shop scheduling problem followed by an assembly stage considering aging effects and preventive maintenance activities // International Journal of Supply and Operations Management. 2016. Vol. 3. Iss. 1. PP. 1215–1233.
7. Chansombat S., Pongcharoen P., Hicks C. A mixed-integer linear programming model for integrated production and preventive maintenance scheduling in the capital goods industry // International Journal of Production Research. 2019. Vol. 57. Iss. 1. PP. 61–82. DOI:10.1080/00207543.2018.1459923
8. Boufellouh R., Belkaid F. Bi-objective optimization algorithms for joint production and maintenance scheduling under a global resource constraint: Application to the permutation flow shop problem // Computers and Operations Research. 2020. Vol. 122(3). P. 104943. DOI:10.1016/j.cor.2020.104943. EDN:TFBTAM
9. Al-Shayea A., Fararah E., Nasr E.A., Mahmoud H.A. Model for Integrating Production Scheduling and Maintenance Planning of Flow Shop Production System // IEEE Access. 2020. Vol. 8. 2020. PP. 208826–208834. DOI:10.1109/ACCESS.2020.3038719. EDN:WKJARC
10. Fattahi P., Fazlollahab H. A Joint Optimization Model for Production Scheduling and Preventive Maintenance Interval // International Journal of Engineering, Transactions B: Applications. 2021. Vol. 34. Iss. 11. PP. 2508–2516.
11. Forghani A., Lotfi M.M., Ranjbar M., Sadegheh A. Hierarchical framework for maintenance and production scheduling of continuous ball mills in tile industries under TOU electricity pricing // Journal of Cleaner Production. 2021. Vol. 327. P. 129440. DOI:10.1016/j.jclepro.2021.129440. EDN:RMVTBA
12. Chen Y., Guan Z., Wang Ch., Chou F.-D., Yue L. Bi-objective optimization of identical parallel machine scheduling with flexible maintenance and job release times // International Journal of Industrial Engineering Computations. 2022. Vol. 13. PP. 457–472. DOI:10.5267/j.ijiec.2022.8.003. EDN:XQSOFO
13. Kumar T.J., Thangaraj M. An ordered precedence constrained flow shop scheduling problem with machine specific preventive maintenance // Journal of Project Management. 2023. Vol. 8. PP. 45–56. DOI:10.5267/j.jpm.2022.8.002. EDN:GGFBCY
14. Esfeh M. K., Shojaei A.A., Javanshir H., Damghani K.K. Solving a bi-objective flexible flow shop problem with transporter preventive maintenance planning and limited buffers by NSGA-II and MOPSO // International Journal of Nonlinear Analysis and Applications. 2022. Vol. 31. Iss. 1. PP. 217–246. DOI:10.22075/ijnaa.2021.24335.2719

15. Lunardi W.T., Cherri L.H., Voos H. A Mathematical Model and a Firefly Algorithm for an Extended Flexible Job Shop Problem with Availability Constraints // Proceedings of the 17th International Conference Artificial Intelligence and Soft Computing (ICAISC 2018, Zakopane, Poland, 3–7 June 2018). Lecture Notes in Computer Science. Cham: Springer, 2018. Vol. 10841. PP. 548–560. DOI:10.1007/978-3-319-91253-0_51
16. Labidi M., Kooli A., Ladhari T., Gharbi A., Suryahatmaja U.S. A Computational Study of the Two-Machine No-Wait Flow Shop Scheduling Problem Subject to Unequal Release Dates and Non-Availability Constraints // IEEE Access. 2018. Vol. 6. PP. 16294–16304. DOI:10.1109/ACCESS.2018.2815598. EDN:YHVJLF
17. Barjoui A.S., Barabadi A., Tavakkoli-Moghaddam R. Non-Preemptive Open Shop Scheduling Considering Machine Availability // Proceedings of International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM, Macao, China, 15–18 December 2019). IEEE, 2019. PP. 1280–1284. DOI:10.1109/IEEM44572.2019.8978648
18. Lunardi W.T., Birgin E.G., Laborie Ph., Ronconi D.P., Voos H. Mixed Integer linear programming and constraint programming models for the online printing shop scheduling problem // Computers & Operations Research. 2020. Vol. 123. P. 105020. DOI:10.1016/j.cor.2020.105020. EDN:WXRELS
19. Gencsi M. Metaheuristic Algorithms for Related Parallel Machines Scheduling Problem with Availability and Periodical Unavailability Constraints // Acta Polytechnica Hungarica. 2024. Vol. 21. Iss. 2. PP.89–110. DOI:10.12700/aph.21.2.2024.2.5. EDN:SESCKT
20. Aggoune R., Deleplanque S. Addressing Machine Unavailability in Job Shop Scheduling: A Quantum Computing Approach // In: Sevaux M., Olteanu A.L., Pardo E.G., Sifaleras A., Makboul S. (eds) Metaheuristics. Proceedings of the 15th International Conference (MIC 2024, Lorient, France, 4–7 June 2024). Lecture Notes in Computer Science. Cham: Springer, 2024. Vol. 14753. PP. 234–245. DOI:10.1007/978-3-031-62912-9_23
21. Williams H.P. Model Building in Mathematical Programming. John Wiley & Sons, 2013. 432 p.
22. Asghari M., Fathollahi-Fard A.M., Mirzapour Al-e-Hashem S.M.J., Dulebenets M.A. Transformation and Linearization Techniques in Optimization: A State-of-the-Art Survey // Mathematics. 2022. Vol. 10. Iss. 2. P. 283 DOI:10.3390/math10020283. EDN:ABRVQM

References

1. Krotov K.V. Models of mixed integer linear programming for optimizing the inclusion of tasks in packages and the order of operations with them in pipeline systems. *Information and Control Systems*. 2024;6:46–57. (in Russ.) DOI:10.31799/1684-8853-2024-6-46-57. EDN:EFCACX
2. Aghezzaf E.-H., Khatab A., Tam P.L. Optimizing production and imperfect preventive maintenance planning's integration in failure-prone manufacturing systems. *Reliability Engineering and System Safety*. 2016;145:190–198. (in Russ.) DOI:10.1016/j.res.2015.09.017. EDN:VENHRR
3. Tam P.L., Aghezzaf E.-H., Khatab A., Le C.H. Integrated Production and Imperfect Preventive Maintenance Planning An Effective MILP-based Relax-and-Fix/Fix-and-Optimize Method. *Proceedings of the 6th International Conference on Operations Research and Enterprise Systems, ICORES 2017, 23–25 February 2017, Porto, Portugal, vol.1*. 2017. p.483–490 DOI:10.5220/0006285504830490
4. Shehni A.A., Cheaitou A., Alsyouf I. Integrated Production and Maintenance Planning: A Comparison Between Block Policies. *Proceedings of the 10th International Conference on Industrial Engineering and Operations Management, 10–12 March 2020, Dubai, UAE*. p.1765–1773. URL: <https://www.ieomsociety.org/ieom2020/papers/300.pdf> [Accessed 08.12.2025]
5. Moghaddam K.S. A Multi-Objective Modeling Approach for Integrated Manufacturing and Preventive Maintenance Planning. *Operations and Supply Chain Management*. 2021;14(1):83–99. DOI:10.31387/oscm0440288
6. Hosseini S.M.H. Modeling the hybrid flow shop scheduling problem followed by an assembly stage considering aging effects and preventive maintenance activities. *International Journal of Supply and Operations Management*. 2016;3(1): 1215–1233.
7. Chansombat S., Pongcharoen P., Hicks C. A mixed-integer linear programming model for integrated production and preventive maintenance scheduling in the capital goods industry. *International Journal of Production Research*. 2019;57(1):61–82. DOI:10.1080/00207543.2018.1459923
8. Boufellouh R., Belkaid F. Bi-objective optimization algorithms for joint production and maintenance scheduling under a global resource constraint: Application to the permutation flow shop problem. *Computers and Operations Research*. 2020;122(3):104943. DOI:10.1016/j.cor.2020.104943. EDN:TFBTAM
9. Al-Shayea A., Fararah E., Nasr E.A., Mahmoud H.A. Model for Integrating Production Scheduling and Maintenance Planning of Flow Shop Production System. *IEEE Access*. 2020;8:208826–208834. DOI:10.1109/ACCESS.2020.3038719. EDN:WKJARC
10. Fattahi P., Fazlollahabadi H. A Joint Optimization Model for Production Scheduling and Preventive Maintenance Interval. *International Journal of Engineering, Transactions B: Applications*. 2021;34(11):2508–2516.
11. Forghani A., Lotfi M.M., Ranjbar M., Sadegheih A. Hierarchical frame-work for maintenance and production scheduling of continuous ball mills in tile industries under TOU electricity pricing. *Journal of Cleaner Production*. 2021;327:129440. DOI:10.1016/j.jclepro.2021.129440. EDN:RMVTBA
12. Chen Y., Guan Z., Wang Ch., Chou F.-D., Yue L. Bi-objective optimization of identical parallel machine scheduling with flexible maintenance and job release times. *International Journal of Industrial Engineering Computations*. 2022;13:457–472. DOI:10.5267/j.ijiec.2022.8.003. EDN:XQSOFO
13. Kumar T.J., Thangaraj M. An ordered precedence constrained flow shop scheduling problem with machine specific preventive maintenance. *Journal of Project Management*. 2023;8:45–56. DOI:10.5267/j.jpjpm.2022.8.002. EDN:GGFBCY
14. Esfeh M.K., Shojaei A.A., Javanshir H., Damghani K.K. Solving a bi-objective flexible flow shop problem with transporter preventive maintenance planning and limited buffers by NSGA-II and MOPSO. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*. 2022;31(1):217–246. DOI:10.22075/ijnaa.2021.24335.2719


15. Lunardi W.T., Cherri L.H., Voos H. A Mathematical Model and a Firefly Algorithm for an Extended Flexible Job Shop Problem with Availability Constraints. *Proceedings of the 17th International Conference Artificial Intelligence and Soft Computing, ICAISC 2018, 3–7 June 2018, Zakopane, Poland. Lecture Notes in Computer Science, vol.10841*. Cham: Springer; 2018. p.548–560. DOI:10.1007/978-3-319-91253-0_51
16. Labidi M., Kooli A., Ladhari T., Gharbi A., Suryahatmaja U.S. A Computational Study of the Two-Machine No-Wait Flow Shop Scheduling Problem Subject to Unequal Release Dates and Non-Availability Constraints. *IEEE Access*. 2018;6:16294–16304. DOI:10.1109/ACCESS.2018.2815598. EDN:YHVJLF
17. Barjoui A.S., Barabadi A., Tavakkoli-Moghaddam R. Non-Preemptive Open Shop Scheduling Considering Machine Availability. *Proceedings of International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management, IEEM, 15–18 December 2019, Macao, China. IEEE*; 2019. p.1280–1284. DOI:10.1109/IEEM44572.2019.8978648
18. Lunardi W.T., Birgin E.G., Laborie Ph., Ronconi D.P., Voos H. Mixed Integer linear programming and constraint programming models for the online printing shop scheduling problem. *Computers & Operations Research*. 2020;123:105020. DOI:10.1016/j.cor.2020.105020. EDN:WXRELS
19. Gencsi M. Metaheuristic Algorithms for Related Parallel Machines Scheduling Problem with Availability and Periodical Unavailability Constraints. *Acta Polytechnica Hungarica*. 2024;21(2):89–110. DOI:10.12700/aph.21.2.2024.2.5. EDN:SESBKT
20. Aggoune R., Deleplanque S. Addressing Machine Unavailability in Job Shop Scheduling: A Quantum Computing Approach. In: *Sevaux M., Olteanu A.L., Pardo E.G., Sifaleras A., Makboul S. (eds) Metaheuristics. Proceedings of the 15th International Conference, MIC 2024, 4–7 June 2024, Lorient, France. Lecture Notes in Computer Science, vol.14753*. Cham: Springer; 2024. p.234–245. DOI:10.1007/978-3-031-62912-9_23
21. Williams H.P. *Model Building in Mathematical Programming*. John Wiley & Sons, 2013. 432 p.
22. Asghari M., Fathollahi-Fard A.M., Mirzapour Al-e-Hashem S.M.J., Dulebenets M.A. Transformation and Linearization Techniques in Optimization: A State-of-the-Art Survey. *Mathematics*. 2022;10(2):283 DOI:10.3390/math10020283. EDN:ABRVQM

Статья поступила в редакцию 14.10.2025; одобрена после рецензирования 25.11.2025; принята к публикации 03.12.2025.

The article was submitted 14.10.2025; approved after reviewing 25.11.2025; accepted for publication 03.12.2025.

Информация об авторе:

**КРОТОВ
Кирилл Викторович**

доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Информационные технологии и системы» Севастопольского государственного университета
 <https://orcid.org/0000-0002-9670-6141>

Автор сообщает об отсутствии конфликтов интересов.

The author declares no conflicts of interests.