

Научная статья

УДК 621.3.011.1

DOI:10.31854/1813-324X-2023-9-1-24-33



Математическая модель несимметричного вибратора с вынесенной точкой питания. Часть 1. Общий подход к построению математической модели

- ✉ Олег Вениаминович Попов¹, ov.popov@mail.ru
Андрей Витальевич Тумашов¹, ice47reg@yandex.ru
Георгий Николаевич Борисов¹, georgiiborisov@gmail.com
Константин Олегович Коровин², korovin.ko@sut.ru

¹ООО «Специальный Технологический Центр»,
Санкт-Петербург, 195220, Российская Федерация

²Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. М.А. Бонч-Бруевича,
Санкт-Петербург, 193232, Российская Федерация

Аннотация: В работе предложена методика раздельного вычисления реактивной составляющей входного сопротивления, сопротивления излучения и сопротивления потерь малых, по сравнению с длиной волны, нормально разомкнутых антенн. Построена развернутая эквивалентная схема несимметричного вибратора с вынесенной точкой питания. Получены интегральные соотношения, определяющие сопротивление излучения и электродвижущую силу эквивалентного генератора. Разложение активной части входного сопротивления на две составляющие, одна из которых характеризует излучаемую мощность, а другая – тепловые потери, позволяет успешно решать как задачу определения коэффициента согласования по сопротивлению, так и коэффициента полезного действия антенны. Полученные результаты могут быть полезны при проектировании антенн и энергетических расчетах радиолиний.

Ключевые слова: коэффициент трансформации, комплексная емкость, сопротивление излучения, входное сопротивление антенны, несимметричный вибратор

Ссылка для цитирования: Попов О.В., Тумашов А.В., Борисов Г.Н., Коровин К.О. Математическая модель несимметричного вибратора с вынесенной точкой питания. Часть 1. Общий подход к построению математической модели // Труды учебных заведений связи. 2023. Т. 9. № 1. С. 24–33. DOI:10.31854/1813-324X-2023-9-1-24-33

Mathematical Model of the Unbalanced Monopole Feed. Part 1. General Approach to Building a Mathematical Model

- ✉ Oleg Popov¹, ov.popov@mail.ru
Andrey Tumashov¹, ice47reg@yandex.ru
Georgy Borisov¹, georgiiborisov@gmail.com
Konstantin Korovin², korovin.ko@sut.ru

¹Special Technology Center LLC,
St. Petersburg, 195220, Russian Federation

²The Bonch-Bruevich Saint-Petersburg State University of Telecommunications,
St. Petersburg, 193232, Russian Federation

Abstract: *The paper proposes a method for separate calculation of the reactive component of the input impedance, radiation resistance and loss resistance small, in comparison with the wavelength of normally open antennas. A detailed equivalent circuit of the Unbalanced Monopole with Shunt Feed (UMSF). Integral relations are obtained that determine the radiation resistance and the electromotive force of an equivalent generator. The decomposition of the active part of the input resistance into two components, one of which characterizes the radiated power, and the other - thermal losses, allows us to successfully solve both the problem of determining the resistance matching coefficient and the antenna efficiency. The results obtained can be useful in the design of antennas and energy calculations of radio links.*

Keywords: *transformation ratio, complex capacitance, radiation resistance, antenna input impedance, unbalanced monopole*

For citation: Popov O., Tumashov A., Borisov G., Korovin K. Mathematical Model of the Unbalanced Monopole Feed. Part 1. General Approach to Building a Mathematical Model. *Proc. of Telecom. Universities*. 2023;9(1):24–33. (in Russ.) DOI:10.31854/1813-324X-2023-9-1-24-33

Введение

Поскольку в настоящее время математическое моделирование используется для исследования самых разных объектов, процессов и явлений, единого, всеобъемлющего определения математической модели на сегодняшний день не существует. В соответствии с одним из определений, математическая модель – это «эквивалент» объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства [1]. Применительно к антеннам это определение можно конкретизировать следующим образом: математическая модель представляет собой совокупность аналитических выражений, связывающих геометрические размеры антенны с ее электрическими характеристиками.

В нижней части ВЧ-диапазона и на более низких частотах широко используются антенны, размеры которых много меньше длины волны. При построении математических моделей таких антенн широко используются методы электростатики, позволяющие найти комплексную емкость антенны. Сопротивление комплексной емкости считается входным сопротивлением антенны, несмотря на то, что вещественная составляющая электростатического сопротивления определяется только тепловыми потерями и никак не связана с процессом излучения. Тем не менее, ввиду малости сопротивления излучения, такой подход дает достаточную для практики точность при определении коэффициента согласования антенны с фидерным трактом по сопротивлению. [2–6].

Наряду с коэффициентом согласования по сопротивлению, весьма важной характеристикой антенны, необходимой для энергетического расчета радиолинии, является коэффициент полезного действия (КПД) [2, 3, 7]. Строгое решение задачи о КПД малых антенн сопряжено с серьезными трудностями, обусловленными необходимостью отделения мощности, рассеиваемой токами, наводимыми в полупроводящей земле ближним полем антенны [2–5, 7] от мощности, идущей на создание электромагнитного поля в дальней зоне. Однако, поскольку

точные электрические характеристики подстилающей поверхности, как правило, неизвестны, приближенная оценка КПД в ряде случаев является вполне достаточной. Часто полагают, что входное сопротивление антенны представляет собой последовательное соединение комплексной емкости с сопротивлением излучения [2–4, 8, 9]. Такая модель является физически обоснованной, поскольку при уменьшении частоты сопротивление излучения стремится к нулю, а входное сопротивление – к электростатическому.

Поскольку практически все ВЧ- и более низкочастотные антенны по типу исполнения относятся к проволочным, для построения математической модели малогабаритной нормально разомкнутой антенны необходимо разработать две методики:

- определения комплексной емкости моделируемой антенны;
- вычисления сопротивления излучения малогабаритной нормально разомкнутой проволочной антенны произвольной конструкции.

При этом, если порядок решения первой задачи достаточно подробно освещен в литературе [2, 4, 5, 10, 11], то разработка общего подхода к решению второй представляет практический интерес. В качестве примера малогабаритной нормально разомкнутой проволочной антенны в данной работе рассматривается несимметричный вибратор с вынесенной точкой питания (НВВТП). Его конструкция схематично представлена на рисунке 1.

Сопротивление излучения, как и, практически все характеристики проволочных антенн, связаны с распределением токов по их проводникам [2], которые можно разделить на две группы:

- 1) непосредственно участвующие в процессе излучения (приема) электромагнитных волн (ЭМВ); на рисунке 1 изображены сплошными линиями;
- 2) не излучающие (не принимающие) электромагнитные волны (ЭМВ), но влияющие на распределение токов по излучающим (принимающим) ЭМВ проводникам и, т. образом, влияющие на характеристики антенны (изображены пунктиром).

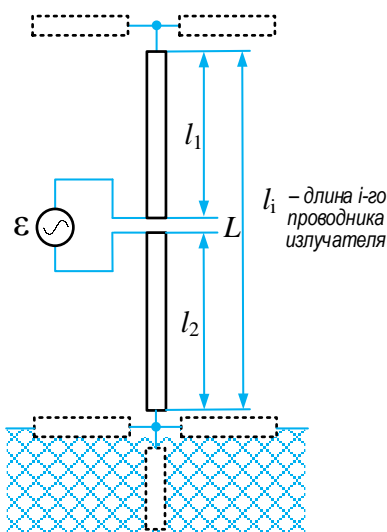


Рис. 1. Схема конструкции НВВТП в общем виде

Fig. 1. General Design of the Unbalanced Monopole with Shunt Feed

Проводники первой группы будем называть излучателем, а второй – корректором распределения тока. В первом приближении можно считать, что поле излучения создается только токами, протекающими по вертикальным проводникам антенны, расположенным в воздухе. Эти проводники образуют излучатель НВВТП. Все остальные проводники образуют корректор распределения тока. Для определения сопротивления излучения можно воспользоваться хорошо зарекомендовавшим себя методом наведенных электродвижущих сил (ЭДС) [2–4], ограничившись рассмотрением только излучателя

НВВТП, но учитывая при этом влияние на распределение тока по излучателю всех остальных проводников и подстилающей поверхности.

Анализ основных закономерностей распределения тока по проводникам излучателя НВВТП

Согласно допущению, принятому в методе наведенных ЭДС, ток, протекающий по проводникам антенны, считается сосредоточенным вдоль осей проводников [2–4]. При этом распределения токов вдоль проводников считаются известными и описываются соотношениями теории линий [4, 8, 9]. Как правило, достаточную точность дает предположение о совпадении распределения токов вдоль проводников антенны с распределением вдоль нагруженной линии без потерь. Согласно работе [4], при совмещении начала координат с точкой пересечения вертикальной осью излучателя НВВТП подстилающей поверхности распределение тока вдоль вертикальных проводников можно представить в виде выражения (1), где $L = l_1 + l_2$ – общая длина излучателя НВВТП; I_a – амплитуда тока на зажимах антенны; $j_\Sigma^0(\xi)$ – безразмерная функция распределения тока по излучателю НВВТП, нормированная к току на зажимах I_a ; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны; l_i – длина i -го проводника; ξ – вертикальная координата; $\hat{Z}_{hi} = Z_{hi}/\rho_i$ – нагрузка на конце i -го проводника, нормированная к его волновому сопротивлению; Z_{hi} – нагрузка на конце i -го проводника:

$$I(\xi) = I_a j_\Sigma^0(\xi) = I_a \begin{cases} \frac{\cos k(L - \xi) + i \hat{Z}_{h1} \sin k(L - \xi)}{\cos k l_1 + i \hat{Z}_{h1} \sin k l_1} & l_2 \leq \xi \leq L \\ \frac{\cos k \xi + i \hat{Z}_{h2} \sin k \xi}{\cos k l_2 + i \hat{Z}_{h2} \sin k l_2} & 0 \leq \xi \leq l_2 \end{cases} \quad (1)$$

Волновые сопротивления проводников излучателя НВВТП определяются через погонную статическую емкость, рассчитываемую по методу среднего потенциала, и описываются выражениями, приведенными в [4], где a_i – радиус i -го проводника:

$$\rho_1 = 60 \left[\ln \frac{l_1}{a_1} - 1 - \frac{L + l_2}{l_2} \ln \frac{L}{L + l_2} \right],$$

$$\rho_2 = 60 \left\{ \ln \frac{l_2}{a_2} - 1 - \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{l_2}{l_1} \right) \ln \frac{L}{L + l_2} - \frac{l_2}{l_1} \ln \frac{4l_2}{L + l_2} \right] \right\}.$$

Легко заметить, что распределение тока по каждому проводнику излучателя описывается двумя вещественными гармоническими функциями. Будем в дальнейшем называть эти функции базовыми, а токи с единичной амплитудой в пучности, распределенные по закону базовой функции – базовыми токами (БТ).

Соотношение (1) можно представить в более компактном виде:

$$j_\Sigma^0(\xi_k) = \begin{cases} j_1^0(\xi_k) = n_{c1} j_{c1}^0(\xi_k) + n_{s1} j_{s1}^0(\xi_k) & l_{k2} \leq \xi_k \leq L_k \\ j_2^0(\xi_k) = n_{c2} j_{c2}^0(\xi_k) + n_{s2} j_{s2}^0(\xi_k) & 0 \leq \xi_k \leq l_{k2} \end{cases} \quad (2)$$

где

$$n_{ci} = \frac{1}{\cos kl_i + i \hat{Z}_{hi} \sin kl_i}, \quad (3)$$

$$n_{si} = i \frac{\hat{Z}_{hi}}{\cos kl_i + i \hat{Z}_{hi} \sin kl_i}, \quad (4)$$

$$j_{c1}^0(\xi_k) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \xi_k \leq l_{k2} \\ \cos(L_k - \xi_k) & l_{k2} \leq \xi_k \leq L_k \end{cases}, \quad (5)$$

$$j_{s1}^0(\xi_k) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \xi_k \leq l_{k2} \\ \sin(L_k - \xi_k) & l_{k2} \leq \xi_k \leq L_k \end{cases}, \quad (6)$$

$$j_{c2}^0(\xi_k) = \begin{cases} \cos(\xi_k) & 0 \leq \xi_k \leq l_{k2} \\ 0 & l_{k2} \leq \xi_k \leq L_k \end{cases}, \quad (7)$$

$$j_{s2}^0(\xi_k) = \begin{cases} \sin(\xi_k) & 0 \leq \xi_k \leq l_{k2} \\ 0 & l_{k2} \leq \xi_k \leq L_k \end{cases}. \quad (8)$$

В соотношениях (2–8) введены обозначения: $j_i^0(\xi_k)$ – функция распределения тока по i -му проводнику излучателя НВВТП; $j_{c1}^0(\xi_k)$, $j_{s1}^0(\xi_k)$, $j_{c2}^0(\xi_k)$, $j_{s2}^0(\xi_k)$ – базовые функции; n_{ci} – коэффициент трансформации тока на зажимах (КТТЗ) НВВТП к косинусному БТ i -го проводника излучателя; n_{si} – КТТЗ НВВТП к синусному БТ i -го проводника излучателя; $L_k = kL$ – суммарная электрическая длина проводников излучателя НВВТП; $l_{ki} = kl_i$ – электрическая длина i -го проводника излучателя НВВТП; $\xi_k = k\xi$ – электрическая координата точки наблюдения.

В выражениях (2–8) геометрические размеры, с целью сокращения числа параметров, заменены электрическими, измеряемыми в радианах.

Из (3) и (4) видно, что КТТЗ к БТ, в общем случае, являются комплексными величинами. Кроме того, легко заметить, что при $\xi_k = l_{k2}$ из соотношений (2–8) следует:

$$j_i^0(l_{k2}) = n_{ci} \cos l_{ki} + n_{si} \sin l_{ki} = 1. \quad (9)$$

Из (9) можно сделать вывод, что функция распределения тока по излучателю НВВТП $j_{\Sigma}^0(\xi_k)$ обладает двумя важными свойствами: сохраняет непрерывность в точке питания НВВТП; из четырех КТТЗ к БТ, введенных в (2), независимыми являются только два, т. к. из (9) следует:

$$n_{si} = \frac{1 - n_{ci} \cos l_{ki}}{\sin l_{ki}}. \quad (10)$$

Таким образом, распределение токов по излучателю НВВТП, в общем случае полностью определяется двумя комплексными числами, т. е. в каждом плече излучателя НВВТП должен быть известен хотя бы один КТТЗ к БТ. Для их определения требуется выявить связь КТТЗ с конструктивным исполнением антенны. Решение этой задачи следует начать с установления связи между входным сопротивлением неизлучающего НВВТП и функцией распределения тока по излучателю.

Поскольку распределения токов в проводниках излучателя совпадают с распределениями в нагруженных линиях передачи без потерь, каждому проводнику можно поставить в соответствие такую линию. При этом входное сопротивление неизлучающего НВВТП будет представлять собой последовательное соединение двух нагруженных линий [4].

$$Z_{\text{вх}} = Z_{\text{вх1}} + Z_{\text{вх2}}, \quad (11)$$

где $Z_{\text{вх1}}$, $Z_{\text{вх2}}$ – входные сопротивления линий, соответствующие, соответственно, верхнему и нижнему проводнику излучателя НВВТП.

Входные сопротивления нагруженных линий без потерь будут [12, 13]:

$$Z_{\text{вх}i} = \rho_i \frac{\hat{Z}_{hi} \cos l_{ki} + i \sin l_{ki}}{\cos l_{ki} + i \hat{Z}_{hi} \sin l_{ki}}. \quad (12)$$

Легко заметить, что, если конечные нагрузки будут чисто мнимыми или будут отсутствовать ($\hat{Z}_{hi} \rightarrow \infty$), входное сопротивление, определяемое соотношениями (11, 12), будет чисто мнимым. Это объясняется тем, что при их выводе проводники излучателя описываются линиями без потерь. Такой прием обычно используется для определения реактивной составляющей входного сопротивления диполя [2–4, 8, 9, 12]. Затем к реактивной составляющей добавляется сопротивление излучения, найденное иным способом. Применительно к НВВТП, соотношения (11) и (12), несмотря на то, что не содержат сопротивления излучения, будут комплексными, поскольку характеризуют не только запасаемую энергию, а и тепловые потери в полупроводящей подстилающей поверхности.

Соотношения (3) и (4) совместно с (12) позволяют установить связь между входным сопротивлением i -го проводника излучателя и соответствующими КТТЗ к БТ:

$$Z_{\text{вх}i} = -i \rho_i n_{si} \cos l_{ki} + i \rho_i n_{ci} \sin l_{ki}. \quad (13)$$

Так как КТТЗ связаны между собой соотношением (10), выражение (13) можно преобразовать к виду:

$$Z_{\text{вх}i} = -i \rho_i \frac{\cos l_{ki} - n_{ci}}{\sin l_{ki}}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (11), получим:

$$Z_{\text{вх}} = -i \left(\rho_1 \frac{\cos l_{k1} - n_{c1}}{\sin l_{k1}} + \rho_2 \frac{\cos l_{k2} - n_{c2}}{\sin l_{k2}} \right). \quad (15)$$

Если НВВТП не содержит верхней нагрузки, то $Z_{\text{н1}} \rightarrow \infty$. Легко заметить, что в этом случае из (3) следует, что $n_{c1} = 0$. В этом случае (15) преобразуется к виду:

$$Z_{\text{вх}}^0 = -i \left(\rho_1 \text{ctgl}_{k2} + \rho_2 \text{ctgl}_{k2} - |n_{c2}| \rho_2 \frac{\cos \phi_{c2}}{\sin l_{k2}} \right) - |n_{c2}| \rho_2 \sin \phi_{c2} / \sin l_{k2}, \quad (16)$$

где $Z_{\text{вх}}^0$ – входное сопротивление НВВТП без верхней нагрузки; $|n_{c2}|$ и ϕ_{c2} – модуль и аргумент КТТЗ к косинусному БТ нижнего плеча НВВТП, соответственно.

Входное сопротивление неизлучающего НВВТП можно трактовать как сопротивление комплексной емкости. Комплексная емкость двух изолированных групп проводников, имеющих между собой электрический контакт, определяется с помощью методик, изложенных в [2, 4, 10, 11, 14, 15].

Пусть \tilde{C}_0 – комплексная емкость НВВТП без верхней нагрузки, определенная электростатическим методом. Тогда:

$$Z_{\text{вх}}^0 = \frac{1}{i\omega \tilde{C}_0} = R_c^0 + iX_c^0, \quad (17)$$

где

$$R_c^0 = -\text{Im}(\tilde{C}_0) / (\omega |\tilde{C}_0|^2), \quad (18)$$

$$X_c^0 = -\text{Re}(\tilde{C}_0) / (\omega |\tilde{C}_0|^2). \quad (19)$$

Соотношения (17–19) преобразовывают (16) в систему уравнений, определяющую модуль и аргумент коэффициента трансформации n_{c2} .

Приравнявая вещественные и мнимые части соотношений (16) и (17), получим:

$$|n_{c2}| \sin \phi_{c2} = -\frac{\sin l_{k2}}{\rho_2} R_c^0, \quad (20)$$

$$|n_{c2}| \cos \phi_{c2} = \frac{\sin l_{k2}}{\rho_2} [\rho_1 \text{ctgl}_{k1} + \rho_2 \text{ctgl}_{k2} + X_c^0]. \quad (21)$$

Легко показать, что решение системы будет:

$$\phi_{c2} = \arctg \frac{-R_c^0}{\rho_1 \text{ctgl}_{k1} + \rho_2 \text{ctgl}_{k2} + X_c^0}, \quad (22)$$

$$|n_{c2}| = \frac{\sin l_{k2}}{\rho_2} \sqrt{[\rho_1 \text{ctgl}_{k1} + \rho_2 \text{ctgl}_{k2} + X_c^0]^2 + (R_c^0)^2}. \quad (23)$$

Таким образом, при отсутствии верхней нагрузки распределение тока по проводникам излучателя НВВТП полностью определяется соотношениями (2), (17), (22), (23) и (10).

Если НВВТП содержит верхнюю нагрузку, то $n_{c1} \neq 0$. В этом случае, как следует из (15), справедливо соотношение:

$$Z_{\text{вх}} - Z_{\text{вх}}^0 = in_{c1} \rho_1 / \sin l_{k1}, \quad (24)$$

где $Z_{\text{вх}}$ – входное сопротивление неизлучающего НВВТП с верхней нагрузкой.

Очевидно, что $Z_{\text{вх}}$ можно рассматривать как сопротивление комплексной емкости НВВТП с верхней нагрузкой. В этом случае:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{1}{i\omega \tilde{C}} = R_c + iX_c, \quad (25)$$

где $R_c = -\text{Im}(\tilde{C}) / (\omega |\tilde{C}|^2)$; $X_c = -\text{Re}(\tilde{C}) / (\omega |\tilde{C}|^2)$; \tilde{C} – комплексная емкость НВВТП с верхней нагрузкой.

Подставляя в (24) соотношения (17) и (25) и приравнявая вещественные и мнимые части, получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} |n_{c1}| \sin \phi_{c1} &= -\frac{\sin l_{k1}}{\rho_1} (R_c - R_c^0) \\ |n_{c1}| \cos \phi_{c1} &= \frac{\sin l_{k1}}{\rho_1} (X_c - X_c^0) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Решение системы (26), будет:

$$\phi_{c1} = \arctg \frac{R_c^0 - R_c}{X_c - X_c^0}, \quad (27)$$

$$|n_{c1}| = \frac{\sin l_{k1}}{\rho_1} \sqrt{(R_c - R_c^0)^2 + (X_c - X_c^0)^2}. \quad (28)$$

Соотношения (22, 23, 27, 28) совместно с (10) и (2) описывают распределение тока по проводникам излучателя НВВТП с учетом как конструктивных особенностей, так и параметров подстилающей поверхности.

В таблице 1 приведены значения комплексной емкости НВВТП при $l_1 = l_2 = 1$ м, $\lambda = 100$ м, $\varepsilon = 4$, $\sigma = 0,01$ см/м. Радиусы проводников: излучателя – 50 мм; верхней нагрузки – 4 мм; противовесов – 2 мм. Длина заземлителя: 0,4 м. Число проводников как нагрузки, так и противовесов равно шести.

ТАБЛИЦА 1. Комплексная емкость НВВТП [Ф]

ТАБЛИЦА 1. Complex capacity of UMSF [Ф]

Длины противовесов (м)	Длины проводников верхней нагрузки (м)		
	0	0,5	1
0	$1,76 \cdot 10^{-11} - i5,09 \cdot 10^{-13}$	$3,072 \cdot 10^{-11} - i1,813 \cdot 10^{-12}$	$5,008 \cdot 10^{-11} - i5,139 \cdot 10^{-12}$
3	$1,743 \cdot 10^{-11} - i2,457 \cdot 10^{-13}$	$3,014 \cdot 10^{-11} - i8,608 \cdot 10^{-13}$	$4,865 \cdot 10^{-11} - i2,38 \cdot 10^{-12}$

На рисунке 2 представлены модули функций распределения тока по проводникам излучателя при различных длинах проводников нагрузки L_A и противовесов L_D .

Видно, что верхняя нагрузка НВВТП существенно выравнивает распределение тока по верхнему проводнику излучателя. Влияние противовесов на функцию распределения тока при установке НВВТП на влажной почве незначительно, однако противовесы, как видно из таблицы 1, существенно снижают уровень тепловых потерь (мнимую составляющую комплексной емкости).

Поскольку, как установлено, распределение тока по излучателю НВВТП, в общем случае, представляет собой линейную комбинацию четырех базовых токов, разработку методики расчета сопротивления излучения следует начать с оценки их взаимного влияния и построения развернутой схемы НВВТП.

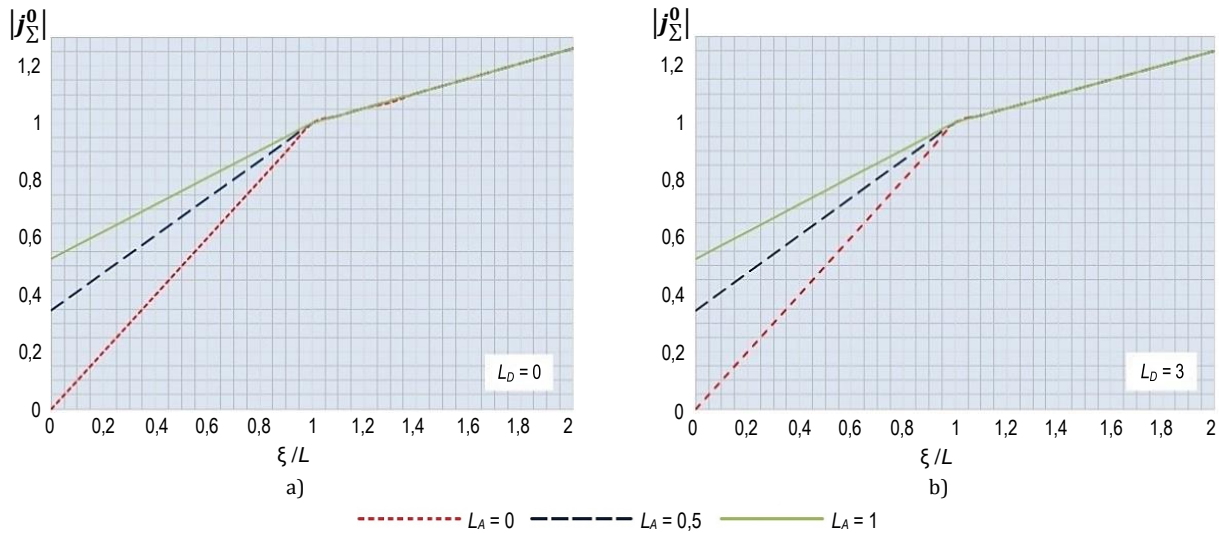


Рис. 2. Модуль функции распределения тока по излучателю НВВТП для а) $L_D = 0$ и б) $L_D = 3$

Fig. 2. Absolute Value of the Current Distribution Function over UMSF element а) $L_D = 0$ and б) $L_D = 3$

Построение развернутой эквивалентной схемы НВВТП

Сопротивление излучения любой проволочной антенны определяется распределением токов по проводникам, участвующим в процессе излучения ЭМВ. Установить связь между сопротивлением излучения и функцией распределения тока можно, воспользовавшись методом наведенных ЭДС [2–4, 16–19 и др.], в основе которого лежит теорема Пойнтинга. Согласно этой теореме, мощность, выделяемая в объеме V , ограниченном замкнутой поверхностью S , определяется [2, 3, 12, 20]:

$$P_a = \frac{1}{2} \int_V \frac{|\bar{j}|^2}{\sigma} dV + \frac{i\omega}{2} \times \times \int_V [\mu_a |\bar{H}|^2 - \varepsilon_a |\bar{E}|^2] dV + \frac{1}{2} \oint_S [\bar{E} \bar{H}^*] \bar{n} dS, \quad (29)$$

где \bar{j} – вектор плотности тока; \bar{E} – напряженность электрического поля, созданного в объеме V ; \bar{H} – напряженность магнитного поля, созданного в объеме V ; \bar{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности S ; σ – удельная проводимость среды.

Первое слагаемое в правой части уравнения (29) определяет мощность тепловых потерь в объеме V . Второе слагаемое есть умноженная на $i\omega$ разность между усредненными за период колебания энергиями магнитного и электрического полей. Третье слагаемое представляет собой мощность, выносимую за пределы объема V .

Пусть поверхность S совпадает с поверхностью проводников излучателя НВВТП. Тогда, если эти проводники идеальные, тепловые потери и запасенная в объеме V энергия будут отсутствовать, а выделяемая в нем мощность будет равна мощно-

сти, передаваемой антенной в фидерный тракт. Соотношение (30) в этом случае можно представить в виде:

$$\frac{1}{2} U_{\text{фТ}} I_{\text{фТ}}^* = \frac{1}{2} \oint_S [\bar{E} \bar{H}^*] \bar{n} dS, \quad (30)$$

где $U_{\text{фТ}}$ – напряжение на входе фидерного тракта; $I_{\text{фТ}}$ – ток на входе фидерного тракта.

Воспользовавшись правилом перестановки смешанного произведения векторов, и считая, что вся энергия за пределы объема V выносится через боковые поверхности, получим:

$$U_{\text{фТ}} I_{\text{фТ}}^* = \oint_S [\bar{H}^* \bar{n}] \bar{E} dS = - \int_0^{l_2} \int_0^{2\pi} \bar{J}_2^*(\varphi, z) \bar{E}_2 a_2 d\varphi dz - \int_{l_2}^L \int_0^{2\pi} \bar{J}_1^*(\varphi, z) \bar{E}_1 a_1 d\varphi dz, \quad (31)$$

где $\bar{J}_i(\varphi, z)$ – распределение поверхностной плотности тока по i -му проводнику; \bar{E}_i – напряженность электрического поля на поверхности i -го проводника; a_i – радиус i -го проводника.

В (31) учтено, что на идеально проводящей поверхности справедливо соотношение [12, 18, 20]:

$$[\bar{H}^* \bar{n}] = -\bar{J}^*. \quad (32)$$

Если вектор напряженности магнитного поля в выражении (31) содержит только φ -ю составляющую, то $\bar{J}_i^*(\varphi, z) = J_i^*(\varphi, z) \bar{z}^0$. Следовательно, считая, что напряженность электрического поля в поперечном сечении проводника постоянна, после интегрирования выражения (31) по φ получим:

$$U_{\Phi T} I_{\Phi T}^* = -\frac{1}{k} \int_0^{l_{k2}} I_2^*(z_k) \bar{E}_2 \bar{z}^0 dz_k - \frac{1}{k} \int_{l_{k2}}^{L_k} I_1^*(z_k) \bar{E}_1 \bar{z}^0 dz_k. \quad (33)$$

В выражении (33) введена новая переменная $z_k = kz$, а также учтено, что:

$$\int_0^{2\pi} \bar{J}_i^*(\phi, z) a_i d\phi = \left[\int_0^{2\pi} J_i^*(\phi, z) a_i d\phi \right] \bar{z}^0 = I_i^*(z) \bar{z}^0, \quad (34)$$

где $I_i(z)$ – распределение тока по длине i -го проводника излучателя НВВТП.

Как следует из (1) и (2), функцию $I_i(z_k)$ в выражении (33) можно представить в виде:

$$I_i(z_k) = I_a [n_{ci} j_{ci}^0(z_k) + n_{si} j_{si}^0(z_k)]. \quad (35)$$

Напряженности электрических полей на поверхностях проводников излучателя НВВТП можно представить в виде суммы [12]:

$$\bar{E}_i = \bar{E}_0 e^{-i \bar{k} \bar{r}_i} + \bar{E}_i \{ I_1(\xi) \} + \bar{E}_i \{ I_2(\xi) \}, \quad (36)$$

где $\bar{E}_0 e^{-i \bar{k} \bar{r}_i}$ – напряженность поля приходящей плоской волны на поверхности i -го проводника;

$\bar{k} = 2\pi \bar{n}_b / \lambda$ – волновой вектор приходящей волны; \bar{n}_b – нормаль к фронту приходящей плоской волны, совпадающая с направлением распространения; \bar{r}_i – радиус-вектор точки наблюдения находящейся на поверхности i -го проводника; $\bar{E}_i \{ \}$ – линейный интегро-дифференциальный оператор, определяющий напряженность электрического поля на поверхности i -го проводника, создаваемую током, указанным в скобках $\{ \}$; $\bar{E}_i \{ I_1(\xi) \}$, $\bar{E}_i \{ I_2(\xi) \}$ – напряженности поля на поверхности i -го проводника, создаваемые током, протекающим по оси верхнего и нижнего плеча излучателя НВВТП, соответственно.

Поскольку напряжение на входе фидерного тракта связано с его входным сопротивлением соотношением:

$$U_{\Phi T} = I_{\Phi T} Z_{\Phi T} = -I_a Z_{\Phi T}. \quad (37)$$

Формулу (33) с учетом (35–37) можно записать в виде выражения (38), где $p = c1, s1, c2, s2$ – обобщенный индекс базовой функции; \bar{r}_0 – радиус-вектор точки пересечения оси излучателя НВВТП с горизонтальной плоскостью, проходящей через середину зазора между смежными торцами верхнего и нижнего проводников; $\int_{l_{ki}}$ – означает интегрирование по длине i -го проводника;

$$i = \begin{cases} 1 & \text{при } p = c1, s1; \\ 2 & \text{при } p = c2, s2 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} -I_a Z_{\Phi T} &= \frac{1}{k} \sum_{v=c,s} \sum_{i=1,2} \left[n_{vi}^* \bar{E}_0 e^{-i \bar{k} \bar{r}_0} \bar{z}^0 \int_{l_{ki}} j_{vi}^0(z_k) e^{-i \bar{k} (\bar{r}_i - \bar{r}_0)} dz_k + \right. \\ &\quad \left. + I_a n_{vi}^* \sum_{v'=c,s} \sum_{i'=1,2} n_{v'i'} \int_{l_{ki}} j_{vi}^0(z_k) \bar{E}_i \{ j_{v'i'}^0(z_k) \} \bar{z}^0 dz_k \right] = \\ &= \frac{1}{k} \sum_p n_p^* \left[\bar{E}_0 e^{-i \bar{k} \bar{r}_0} \bar{z}^0 \int_{l_{ki}} j_p^0(z_k) e^{-i \bar{k} (\bar{r}_i - \bar{r}_0)} dz_k + I_a \sum_{p'} n_{p'} \int_{l_{ki}} j_p^0(z_k) \bar{E}_i \{ j_{p'}^0(z_k) \} \bar{z}^0 dz_k \right] \end{aligned} \quad (38)$$

Учитывая размерность интегралов в (38), обозначим:

$$\varepsilon_p = -\frac{1}{k} \bar{E}_0 e^{-i \bar{k} \bar{r}_0} \bar{z}^0 \int_{l_{ki}} j_p^0(z_k) e^{-i \bar{k} (\bar{r}_i - \bar{r}_0)} dz_k, \quad (39)$$

$$z_{p p'} = \frac{1}{k} \int_{l_{ki}} j_p^0(z_k) \bar{E}_i \{ j_{p'}^0(z_k) \} \bar{z}^0 dz_k, \quad (40)$$

где ε_p – ЭДС базового тока p ; $z_{p p'} = r_{p p'} + i x_{p p'}$ – взаимное сопротивление базового тока $p p'$.

С учетом сделанных обозначений, соотношение (38) можно представить следующим образом:

$$\varepsilon = I_a (Z_{\Phi T} + Z_{ii}), \quad (41)$$

где

$$\varepsilon = \sum_p n_p^* \varepsilon_p \quad (42)$$

$$Z_{ii} = \sum_p \sum_{p'} n_p^* n_{p'} z_{p p'}, \quad (43)$$

ε – ЭДС эквивалентного генератора НВВТП; Z_{ii} – входное сопротивление излучателя НВВТП.

Соотношения (42) и (43) в ряде случаев удобно представить в матричном виде:

$$\varepsilon = \langle N^* \varepsilon_{BT} \rangle, \quad (44)$$

$$Z_{\text{и}} = \langle N^* | Z_{\text{БТ}} | N \rangle, \quad (45)$$

где $\langle N^* = |n_{c1}^* n_{s1}^* n_{c2}^* n_{s2}^*|$ – комплексно-сопряженная матрица-строка КТТЗ к БТ; $\epsilon_{\text{БТ}}$ – матрица-столбец ЭДС БТ; $|Z_{\text{БТ}}|$ – матрица взаимных сопротивлений БТ.

Следует отметить, что сопротивление $Z_{\text{и}}$ получено путем анализа закона сохранения энергии в объеме проводников излучателя НВВТП. Поскольку при этом считалось, что тепловые потери в проводниках отсутствуют, активная составляющая этого сопротивления является сопротивлением излучения и никак не связана с тепловыми потерями в подстилающей поверхности.

Учитывая, что из теоремы взаимности следует:

$$z_{p p'} = z_{p' p},$$

соотношения (43) и (45) в развернутом виде будут:

$$\begin{aligned} Z_{\text{и}} = & |n_{c1}|^2 z_{c1c1} + |n_{s1}|^2 z_{s1s1} + |n_{c2}|^2 z_{c2c2} + \\ & + |n_{s2}|^2 z_{s2s2} + (n_{c1}^* n_{s1} + n_{c1} n_{s1}^*) z_{c1s1} + \\ & + (n_{c1}^* n_{c2} + n_{c1} n_{c2}^*) z_{c1c2} + \\ & + (n_{c1}^* n_{s2} + n_{c1} n_{s2}^*) z_{c1s2} + \\ & + (n_{s1}^* n_{c2} + n_{s1} n_{c2}^*) z_{s1c2} + \\ & + (n_{s1}^* n_{s2} + n_{s1} n_{s2}^*) z_{s1s2} + \\ & + (n_{c2}^* n_{s2} + n_{c2} n_{s2}^*) z_{c2s2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Видно, что сопротивление излучателя представляет собой сумму всех взаимных сопротивлений базовых токов, умноженных на вещественные числа. Это значит, что сопротивление излучения

определяется только вещественными составляющими взаимных базовых токов:

$$R_{\Sigma} = \text{Re}(Z_{\text{и}}) = \sum_p \sum_{p'} n_p^* n_{p'} r_{pp'}. \quad (47)$$

Соотношение (47) можно представить в матричной форме:

$$R_{\Sigma} = \langle N^* \text{Re}|Z_{\text{БТ}}| N \rangle = \langle N^* | R_{\text{БТ}} | N \rangle, \quad (48)$$

где $|R_{\text{БТ}}|$ – вещественная составляющая матрицы $|Z_{\text{БТ}}|$.

Как известно [2, 3, 16, 17, 19, 21], приемная антенна представляет собой эквивалентный генератор, характеризующийся ЭДС и внутренним сопротивлением. Входное сопротивление малых по сравнению с длиной волны антенн, как указывалось ранее, фактически является последовательным соединением комплексной емкости с сопротивлением излучения. Комплексная емкость характеризует реактивную составляющую входного сопротивления и тепловые потери. Сопротивление излучения в этом случае должно совпадать с внутренним сопротивлением эквивалентного генератора ЭДС. Эквивалентная схема НВВТП, представленная таким образом, изображена на рисунке 3а. Для доказательства чистоты активного характера внутреннего сопротивления эквивалентного генератора на рис. 3б представлена эквивалентная схема излучателя в развернутом виде, иллюстрирующем соотношение (44) и (48).

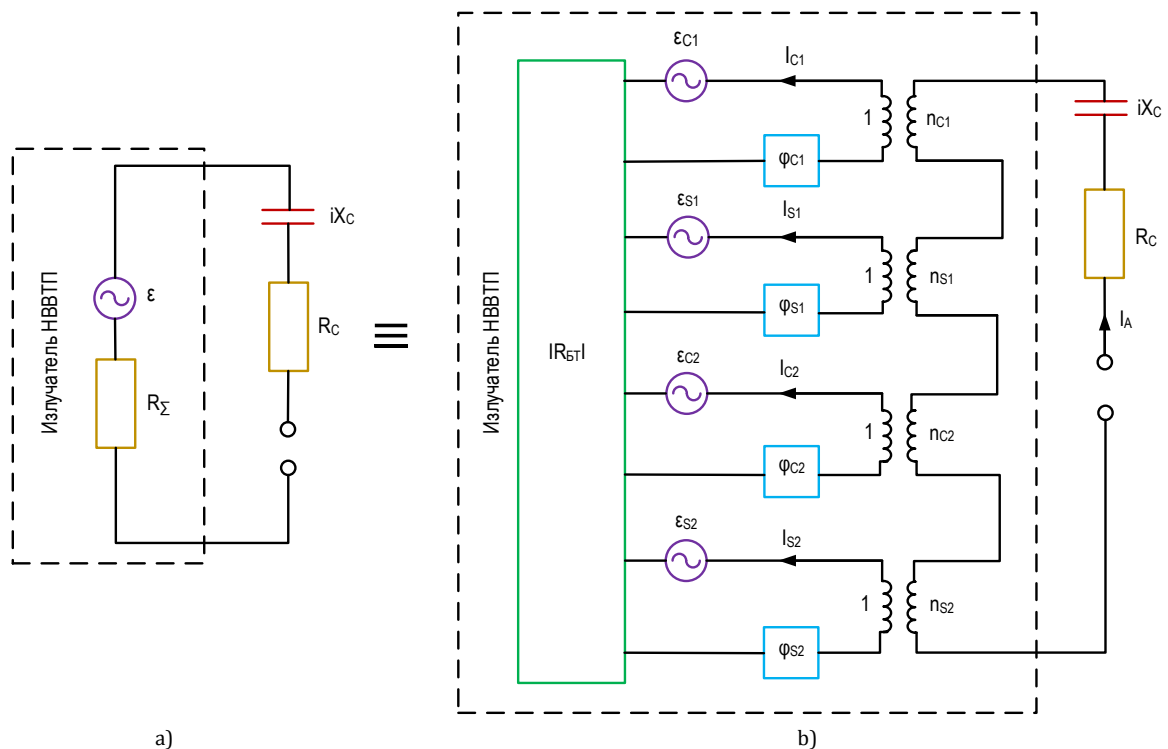


Рис. 3. Эквивалентные схемы НВВТП

Fig. 3. Equivalent Circuits of UMSF

Каждому БТ на рисунке 3b поставлен в соответствие эквивалентный генератор ЭДС ε_p . Внутренним сопротивлением всех эквивалентных генераторов служит восьмиполюсник, описываемый матрицей взаимных сопротивлений, состоящей из активных элементов. Численные значения этих элементов определяются интегро-дифференциальным соотношением (40). Комплексным коэффициентам трансформации на развернутой эквивалентной схеме поставлены в соответствие идеальные трансформаторы в совокупности с фазовращателями. Входные зажимы трансформаторов соединены последовательно, преобразуя активный эквивалентный восьмиполюсник в эквивалентный генератор ЭДС, параметры которого связаны с параметрами развернутой эквивалентной схемы соотношениями (44) и (48).

Как следует из эквивалентной схемы, входное сопротивление НВВТП будет:

$$Z_a = R_\Sigma + R_c + i X_c. \quad (49)$$

Легко заметить, что практически все параметры развернутой эквивалентной схемы в той или иной степени связаны с комплексной емкостью НВВТП. Таким образом, первоочередной задачей при построении математической модели НВВТП является установление связи между геометрическими раз-

мерами антенны и ее комплексной емкостью с учетом электрических параметров подстилающей поверхности.

Заключение

В конструкции НВВТП выделены проводники, непосредственно участвующие в создании ЭМП в дальней зоне. Показано, что ток, протекающий по этим проводникам, является линейной комбинацией четырех токов, распределенных по гармоническому закону. Эти элементарные токи предложено называть базовыми. Получены аналитические выражения, связывающие амплитуды БТ с комплексной емкостью НВВТП. Показано, что сопротивление излучения определяется вещественными составляющими матрицы взаимных сопротивлений эквивалентного восьмиполюсника с БТ на входах. Получены интегральные соотношения, определяющие элементы этой матрицы. Построена развернутая эквивалентная схема НВВТП и показано, что для построения математической модели достаточно преобразования интегральных соотношений к виду, пригодному для инженерных расчетов.

Установлено, что одним из важнейших параметров малых, по сравнению с длиной волны антенн является комплексная емкость, что делает задачу ее определения одной из главных при разработке математических моделей.

Список источников

1. Самарский А.А., Михайлов А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
2. Гавеля Н.П., Истрашкин А.Д., Муравьев Ю.К., Серков В.П. Антенны. Ч. I. Л.: ВКАС, 1963. 633 с.
3. Серков В.П. Распространение радиоволн и антенные устройства. Л.: ВАС, 1981.
4. Муравьев Ю.К. Справочник по расчету проволочных антенн. Л.: ВАС, 1978.
5. Бесчастнов Н.С., Конторович М.И. О потерях в земле при использовании корпуса передатчика в качестве противовеса // Труды ВКАС. 1944. № 3.
6. Конторович М.И. О расчете емкости антенны по методу Хоу // Труды ВКАС. 1943. № 2.
7. Калинин А.И., Черенкова Е.Л. Распространение радиоволн и работа радиолоний. М.: Связь, 1971. 439 с.
8. Зернов Н.В., Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей. Л.: Энергия: Ленингр. отд-ние, 1972. 816 с.
9. Корбанский И.Н. Антенны: учебное пособие для вузов. М.: Энергия, 1973. 363 с.
10. Русин Ю.С. Метод приближенного расчета электрической емкости // Электричество. 1960. № 11. С. 48.
11. Иосель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г. Расчет электрической емкости. Л.: Энергоиздат: Ленингр. отд-ние, 1981. 288 с.
12. Емелин Б.Ф. Нерегулярные волноводы и резонаторы. Л.: ВКАС, 1959. 219 с.
13. Белецкий А.Ф. Основы теории линейных электрических цепей. М.: Связь, 1967. 608 с.
14. Фихманас Р.Ф., Фридберг П.Ш. Метод Хоу расчета емкости тел и его связь с вариационными принципами // Журнал технической физики. 1970. Т. 40.
15. Попов О.В., Тумашов А.В., Борисов Г.Н. Методика расчета сопротивления потерь заземленных несимметричных вибраторов с вынесенной точкой питания // Успехи современной радиоэлектроники. 2021. Т. 75. № 4. С. 71-79.
16. Вершков М.В. Судовые антенны. Л.: Судостроение, 1972. 424 с.
17. Фрадин А.З. Антенно-фидерные устройства: учебн. пособие для вузов связи. М.: Связь, 1977. 440 с.
18. Кисунько Г.В. Электродинамика полых систем. Л.: ВКАС, 1949. 424 с.
19. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 295 с.
20. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные поля и волны. М.: Изд-во «Советское радио», 1971.
21. Белоцерковский Г.Б. Антенны. М.: Государственное научно-техническое издательство ОБОРОНГИЗ, 1962.

References

1. Samarsky A.A., Mikhailov A.A. *Math Modeling: Ideas. Methods. Examples*. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2001. 320 p. (in Russ.)
2. Gavelya N.P., Istrashkin A.D., Muravyov Yu.K. *Antennas. Part I*. Leningrad: Military Academy of Communications Publ.; 1963. 633 p. (in Russ.)


3. Serkov V.P. *Radio Wave Propagation and Antenna Devices*. Leningrad: Military Academy of Telecommunications Publ.; 1981. (in Russ.)
4. Muravyov Yu.K. *Handbook for the Calculation of Wire Antennas*. Leningrad: Military Academy of Telecommunications Publ.; 1978. (in Russ.)
5. Beschastnov N.S., Kontorovich M.I. On Loss in the Ground when Assembling the Mechanism as a Counterweight. *Trudy VKAS*. 1944;3. (in Russ.)
6. Kontorovich M.I. On the calculation of the capacitance of the antenna by the Howe method. *Trudy VKAS*. 194;2. (in Russ.)
7. Kalinin A.I., Cherenkova E.L. *Propagation of Radio Waves and the Operation of Radio Links*. Moscow: Sviaz Publ.; 1971. 439 p. (in Russ.)
8. Zernov N.V., Karpov V.G. *Theory of Radio Circuits*. Leningrad: Energiia Publ.; 1972. 816 p. (in Russ.)
9. Korbansky I.N. *Antennas*. Moscow: Energiia Publ.; 1973. 336 p. (in Russ.)
10. Rusin Yu.S. Approximate Capacitance Measurement Method. *Elektrichestvo*. 1960;11(48) (in Russ.)
11. Iossel Yu.Ya., Kochanov E.S., Strunsky M.G. *Capacity Calculation*. Leningrad: Energoizdat Publ.; 1981. 288 p. (in Russ.)
12. Emelin B.F. *Irregular Waveguides and Resonators*. Leningrad: Military Academy of Communications Publ.; 1959. 219 p. (in Russ.)
13. Beletsky A.F. *Fundamentals of the Theory of Linear Mathematical Circuits*. Moscow: Sviaz Publ.; 1967. 608 p. (in Russ.)
14. Fikhmanas R.F., Fridberg P.Sh. Method for Calculating the Capacity of Bodies and its Connection with Variational Principles. *Technical Physics*. 1970;40. (in Russ.)
15. Popov O.V., Tumashov A.V., Borisov G.N. Method for Calculating the Loss Asymmetric Vibrators with a Remote Power Point. *Journal Achievements of Modern Radioelectronics*. 2021;75(4):71–79. DOI:10.18127/j20700784-202104-10.
16. Vershkov M.V. *Ship Antennas*. Leningrad: Sudostroenie Publ.; 1972. 424 p. (in Russ.)
17. Fradin A.Z. *Antenna-Feeder Devices*. Moscow: Sviaz Publ.; 1977. 440 p. (in Russ.)
18. Kisunko G.V. *Electrodynamics of Hollow Systems*. Leningrad: Military Academy of Communications Publ.; 1949. 426 p. (in Russ.)
19. Markov G.T., Chaplin A.F. *Excitation of Electromagnetic Waves*. Moscow: Radio i sviaz Publ.; 1983. 295 p. (in Russ.)
20. Goldstein L.D., Zernov N.V. *Electromagnetic Fields and Waves*. Moscow: Sovetskoe radio Publ.; 1971. (in Russ.)
21. Belotserkovsky G.B. *Antennas*. Moscow: State Scientific and Technical Publishing House OBORONGIZ, 1962. (in Russ.)

Статья поступила в редакцию 30.01.2023; одобрена после рецензирования 13.02.2023; принята к публикации 14.02.2023.


The article was submitted 30.01.2023; approved after reviewing 13.02.2023; accepted for publication 14.02.2023.

Информация об авторах:


ПОПОВ
Олег Вениаминович

кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник ООО «Специальный технологический центр»,
 <https://orcid.org/0000-0002-5315-2679>


ТУМАШОВ
Андрей Витальевич

аспирант кафедры радиосистем и обработки сигналов Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича,
 <https://orcid.org/0000-0003-2656-0463>

БОРИСОВ
Георгий Николаевич

инженер ООО «Специальный технологический центр»,
 <https://orcid.org/0000-0002-3275-251X>

КОРОВИН
Константин Олегович

кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой радиосистем и обработки сигналов Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича,
 <https://orcid.org/0000-0001-7979-3725>