

Научная статья

УДК 519.614

DOI:10.31854/1813-324X-2022-8-4-14-19



Связь симметрии и антисимметрии квазиортогональных циклических матриц с простыми числами

Александр Михайлович Сергеев, aleks.asklab@gmail.com

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
Санкт-Петербург, 190000, Российская Федерация

Аннотация: Рассматриваются квазиортогональные матрицы Адамара и матрицы Мерсенна с двумя и тремя значениями элементов, используемые в обработке цифровых данных, а также в качестве основы помехоустойчивых кодов и алгоритмов ортогональных преобразований изображений. Внимание уделяется структурам циклических матриц с симметриями и антисимметриями. Показывается связь симметрии и антисимметрии структур циклических матриц Адамара и Мерсенна на порядках, равных простым числам, произведению близких простых чисел, составным числам, степеням простого числа. Отдельно выделены порядки, равные степени простого числа 2, как порядки матриц Адамара, так и основа составных порядков матриц Мерсенна блочных структур с двумя значениями элементов. Показывается, что симметричные матрицы Адамара циклических и двуциклических структур, согласно расширенной границе Райзера, не существуют на порядках выше 32. Матрицы Мерсенна составных порядков, относящихся к последовательности чисел Мерсенна $2k - 1$, вложенных в последовательность порядков основного семейства матриц Мерсенна $4t - 1$, существуют в симметричном и антисимметричном виде. Для порядков, равных степеням простого числа, матрицы Мерсенна существуют в виде блочно-диагональных конструкций с тремя значениями элементов. Значение степени простого числа определяет количество блоков вдоль диагонали матрицы, на которой расположены элементы с третьим значением. При этом блоки являются циклическими симметричными и антисимметричными.

Ключевые слова: простые числа, квазиортогональные матрицы, матрицы Адамара, матрицы Мерсенна, симметричные и антисимметричные матрицы, кодирование сигналов, кодирование изображений

Источник финансирования: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-06029.

Ссылка для цитирования: Сергеев А.М. Связь симметрии и антисимметрии квазиортогональных циклических матриц с простыми числами // Труды учебных заведений связи. 2022. Т. 8. № 4. С. 14–19. DOI:10.31854/1813-324X-2022-8-4-14-19

Interrelation of Symmetry and Antisymmetry of Quasi-Orthogonal Cyclic Matrices with Prime Numbers

Aleksandr Sergeev, aleks.asklab@gmail.com

Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,
St. Petersburg, 190000, Russian Federation

Abstract: Quasi-orthogonal Hadamard matrices and Mersenne matrices with two and three values of the elements, used in digital data processing, are considered, as well as the basis of error-correcting codes and algorithms for transforming orthogonal images. Attention is paid to the structures of cyclic matrices with

symmetries and antisymmetries. The connection between symmetry and antisymmetry of structures of cyclic Hadamard and Mersenne matrices on a orders equal to prime numbers, products of close primes, composite numbers, powers of a prime number is shown. Separately, orders equal to the degrees of the prime number 2 are distinguished, both the orders of Hadamard matrices and the basis of the composite orders of Mersenne matrices of block structures with two element values. It is shown that symmetric Hadamard matrices of cyclic and bicyclic structures, according to the extended Riser boundary, do not exist on orders above 32. Mersenne matrices of composite orders belonging to the sequence of Mersenne numbers $2^k - 1$ nested in the sequence of orders of the main family of Mersenne matrices $4t - 1$ exist in a symmetric and antisymmetric form. For orders equal to the powers of a prime number, Mersenne matrices exist in the form of block-diagonal constructions with three element values. The value of prime power determines the number of blocks along the diagonal of the matrix on which the elements with the third value are located. The cyclic blocks are symmetrical and antisymmetric.

Keywords: prime numbers, quasi-orthogonal matrices, Hadamard matrices, Mersenne matrices, symmetric and antisymmetric matrices, signal encoding, image encoding

Funding: This research was funded by RFBR according to the research project No. 19-29-06029.

For citation: Sergeev A. Interrelation of Symmetry and Antisymmetry of Quasi-Orthogonal Cyclic Matrices with Prime Numbers. *Proc. of Telecom. Universities*. 2022;8(4):14–19. (in Russ.) DOI:10.31854/1813-324X-2022-8-4-14-19

Введение

Ортогональные (квазиортогональные) матрицы широко применяются в задачах обработки и преобразования информации. Особый интерес представляет поиск структурированных матриц с двумя или тремя значениями элементов [1], таких, например, как матрицы Адамара H_n , для которых справедливо $H_n^T H_n = nI$ на порядках $n = 4t$, где t – натуральное число, и матрицы Мерсенна M_n , для которых справедливо $M_n^T M_n = \omega(n)I$ на порядках $n = 4t - 1$, где $\omega(n)$ – вес матрицы [2, 3]; $I = \text{diag}\{1, 1, 1, \dots, 1\}$.

В помехоустойчивом кодировании изображений при передаче по открытым коммуникациям [4], в обработке изображений и их фильтрации [5–7] преимущественно используются ортогональные матрицы симметричные и структурированные по Уолшу, в кодировании сигналов – циклические матрицы [4, 8]. Однако для таких матриц ограничены возможные порядки существования и виды симметрии их структур на этих порядках.

Поиску связей математических объектов разного происхождения посвящено много работ. Именно понимание таких связей, например, для матриц, чисел и известных числовых последовательностей позволило получить уникальные результаты:

- матрицы золотого сечения на порядках, кратных размерам изображений в форматах JPEG и MJPEG [9];
- способ цепочного вычисления квазиортогональных матриц с разными предикторами [10];
- получение новых конструкций матриц Адамара на основе ядра (матриц Мерсенна) с окаймлением на всех порядках $n = 4t$ [11].

В настоящей работе рассматривается связь простых чисел, произведения близких простых чисел, составных чисел и степеней простых чисел как порядков матриц Адамара и Мерсенна с симметриями их циклических структур. Эта связь позволяет упростить выбор и процесс поиска таких матриц для конкретных преобразований изображений и сигналов.

Симметрии матриц Адамара и Мерсенна

Известно, что матрица:

- симметрична, если ее одинаковые элементы расположены симметрично относительно главной диагонали;
- антисимметрична, если расположенные симметрично относительно главной диагонали элементы имеют разные знаки [12];
- персимметрична, если одинаковые элементы расположены симметрично относительно побочной диагонали.

Порядки матриц Адамара, равные степеням простого числа 2, входят в общую последовательность порядков матриц Адамара $4t$.

Количество симметричных циклических матриц Адамара с элементами $\{1, -1\}$ ограничивает гипотеза Райзера [13]. Согласно ей, матриц Адамара порядков, больших 2^2 , нет. Эта гипотеза расширена на двуциклические матрицы порядков до 2^5 из четырех блоков порядка 2^4 [14]. Хотя гипотезы не доказаны, однако вычислительный эксперимент по поиску матриц указанных конструкций на порядках выше 32, длящийся более 5 лет, не позволил их опровергнуть. Таким образом, циклических и би-

циклических симметричных матриц Адамара ограниченное число, и осуществлять их поиск на порядках, больших 2^5 , не имеет смысла.

Ограничения на существование симметричных (антисимметричных) циклических матриц Мерсенна с элементами $\{1, -b\}$ носят иной характер, поскольку эти матрицы нечетных порядков, обобщающие матрицы Адамара, имеют другой генезис, и в основном циклические [15]. Нечетные порядки матриц Мерсенна связаны с нечетными простыми числами. На рисунке 1 приведены портреты [16] циклических симметричной и антисимметричной матриц Мерсенна порядка 11, где белое поле обозначает позицию элемента со значением 1, а синее – позицию элемента $-b$ в матрице. Здесь антисимметричная матрица является персимметричной.

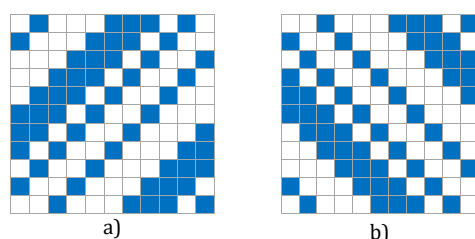


Рис. 1. Портреты циклических симметричной (а) и антисимметричной (б) матриц M_{11}

Fig. 1. Portraits of Cyclic Symmetric (a) and Antisymmetric (b) Matrices M_{11}

Порядки матриц Мерсенна $n = 4t - 1$ включают простые или составные числа Мерсенна, степень простого числа или произведение пар близких простых чисел [17].

Связь простых чисел как порядков матриц Мерсенна с их структурами

Впервые связь порядков, равных простым числам, была отмечена Холлом в работе [18]. Он обнаружил, что если порядок матрицы Мерсенна равен произведению пар близких простых чисел, то она будет циклической. В качестве примера на рисунке 2 приведен портрет циклической матрицы Мерсенна порядка 15 ($n = 3 \times 5$).

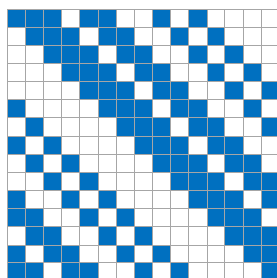


Рис. 2. Портрет циклической персимметричной матрицы M_{15} с дефектом антисимметрии

Fig. 2. Portrait of a Cyclic Persymmetric Matrix M_{15} with an Antisymmetry Defect

Однако Холл никак не отметил того факта, что циклическость структуры этой матрицы получена за

счет дефекта антисимметрии [12], который сегодня для циклических матриц измеряется и учитывается при построении. Учет возможных дефектов антисимметрии позволил найти другие циклические матрицы порядков 15 и 35 [19], портреты которых приведены на рисунке 3, где видны эти дефекты.

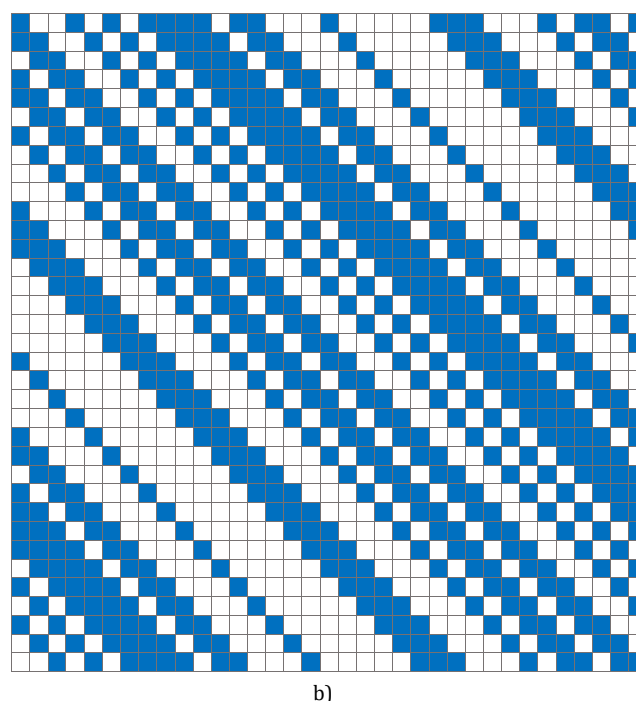
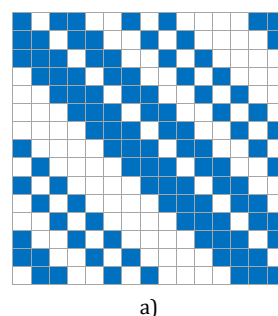


Рис. 3. Портреты циклических матриц M_{15} (а) и M_{35} (б) с дефектами антисимметрии

Fig. 3. Portraits of Cyclic Matrices M_{15} (a) and M_{35} (b) with Antisymmetry Defects

Позже Холл нашел еще циклические матрицы порядков 35 ($n = 5 \times 7$) и 63 ($n = 7 \times 9$). Однако число 9 не является простым, и можно предположить, что матрица Мерсенна порядка 63, найденная Холлом, относится к матрицам рассматриваемого типа по другому основанию (ведь циклической матрицы Мерсенна порядка 99 ($n = 9 \times 11$) нет именно по причине того, что число 9 не является простым). Действительно, порядок 63 является составным и относится к последовательности чисел Мерсенна $n = 2^k - 1$, вложенных в последовательность порядков основного семейства матриц Мерсенна $n = 4t - 1$. Матрицы же основного семейства всегда имеют циклическую структуру.

Простое число 2 является четным. Следовательно, степени этого числа и связанные с ними минимальным расстоянием в единицу числа Мерсенна отличаются от степеней прочих простых чисел. Плата за существование матриц Мерсенна составных порядков $n = 2^k - 1$ прежняя – это циклические матрицы с дефектом антисимметрии.

Для порядков, равных степеням простых чисел, соответствуют блочно-циклические матрицы, у которых степень определяет число блоков вдоль диагонали. Например, найденная матрица M_{27} ($n = 3^3$) состоит из 3×3 блоков порядка 9, а каждый из них, в свою очередь, состоит из блоков порядка 3, каждый из которых является циклическим симметричным или антисимметричным. Такие блочно-циклические матрицы также наделены свойством симметрии и антисимметрии относительно главной диагонали, на которой располагаются элементы с третьим значением d . Пример блочно-циклической антисимметричной матрицы Мерсенна порядка 27 (она же матрица Якобсталя с элементом -1 вместо $-b$) [18], приведен на рисунке 4. Здесь элементы со значением d на диагонали представлены серым цветом.

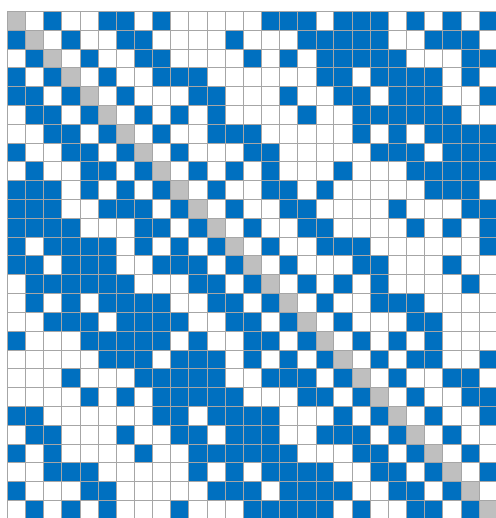


Рис. 4. Портрет блочно-циклической антисимметричной матрицы M_{27}

Fig. 4. Portrait of a Block-Cyclic Antisymmetric Matrix M_{27}

Как и матрица M_{11} , приведенная на рисунке 4, матрица M_{27} является в целом антисимметричной и персимметричной.

Особенности практических применений циклических матриц

Преимущества практических применений симметричных ортогональных матриц Адамара и Мерсенна – Уолша в системах сжатия, маскирования,

помехоустойчивого кодирования изображений показаны в работах [20–22] и многих других.

Однако в отличие от симметричных ортогональных матриц, особенности симметричных и персимметричных циклических квазиортогональных матриц, имеющие практическое значение, следующие.

Во-первых, это простота хранения. Матрица восстанавливается по первой строке циклическим сдвигом – работой с индексами элементов при программной реализации алгоритмов преобразований.

Во-вторых, циклическая симметричная и персимметричная матрицы при транспонировании не меняют симметрии, что упрощает выполнение матричных умножений при прямом и обратном преобразованиях.

В-третьих, циклические матрицы Мерсенна, являясь основой (ядром) матриц Адамара [11], обеспечивают получение целого спектра «почти циклических» матриц Адамара – матриц с каймой [23], значительно расширяя их количество для применения в ортогональных преобразованиях.

Циклические персимметричные матрицы Мерсенна, являясь основой помехоустойчивых кодов, хорошо себя зарекомендовали в системах с корреляционным приемом сигналов [8, 24], в том числе в виде вложенных конструкций. Они имеют наилучшие отношения главного пика автокорреляционной функции к максимальным по амплитуде боковым лепесткам. Как показано в работе [8], по данной характеристике полученные коды оказались лучше, чем широко известные коды Баркера, используемые в наборе стандартов связи IEEE802.11 [25].

Заключение

Строки циклических квазиортогональных матриц могут быть использованы в качестве основы кодов для систем связи с корреляционным приемом или помехоустойчивого кодирования радиосигналов и изображений.

В работе показано, что циклические квазиортогональные матрицы с симметриями существуют на порядках, равных составным числам Мерсенна, в том числе равных произведениям пар близких простых чисел. Блочные циклические матрицы Мерсенна с симметриями структуры существуют на порядках, равных степени простого числа.

Рассмотренные в работе связи порядков матриц и простых чисел позволяют упростить поиск циклических квазиортогональных матриц с особенностями симметрий на порядках, необходимых при разработке помехозащищенных кодов.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Н.А. Балонину за консультации и ценные советы в процессе работы над материалом.

Список источников

1. Seberry J., Yamada M. *Hadamard Matrices: Constructions using Number Theory and Linear Algebra*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2020. 352 p.
2. Балонин Н.А., Сергеев М.Б. Нормы обобщенных матриц Адамара // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. № 2. С. 5–11.
3. Mohan M.T. p -almost Hadamard matrices and λ -planes // *Journal of Algebraic Combinatorics*. 2022. Vol. 55. Iss. 1. PP. 89–108. DOI:10.1007/s10801-020-00991-y
4. Mironovsky L.A., Slaev V.A. *Strip-Method for Image and Signal Transformation*. Berlin, Boston: De Gruyter, 2011. 166 p. DOI:10.1515/9783110252569
5. Seberry J., Wysocki B.J., Wysocki T.A. On some applications of Hadamard matrices // *Metrika*. 2005. Vol. 62. Iss. 2-3. PP. 221–239. DOI:10.1007/s00184-005-0415-y
6. Wang R. *Introduction to Orthogonal Transforms: With Applications in Data Processing and Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 504 p.
7. Balonin N., Vostrikov A., Sergeev M. Mersenne-Walsh Matrices for Image Processing // *Proceedings of the 8th International KES Conference on Intelligent Interactive Multimedia: Systems and Services (KES-IIMSS-15, Sorrento, Italy, 17–19 June 2015)*. *Smart Innovation, Systems and Technologies*. Vol. 40. Cham: Springer, 2015. PP. 141–147. DOI: 10.1007/978-3-319-19830-9_13
8. Сергеев М.Б., Ненашев В.А., Сергеев А.М. Вложенные кодовые конструкции Баркера – Мерсенна – Рагхаварао // Информационно-управляющие системы. 2019. № 3(100). С. 71–81. DOI:10.31799/1684-8853-2019-3-71-81
9. Балонин Н.А., Сергеев М.Б. Матрица золотого сечения G_{10} // Информационно-управляющие системы. 2013. № 6(67). С. 2–5.
10. Balonin N.A., Vostrikov A.A., Sergeev M.B. On two predictors of calculable chains of quasi-orthogonal matrices // *Automatic Control and Computer Sciences*. 2015. Vol. 49. Iss. 3. PP. 153–158. DOI:10.3103/S0146411615030025
11. Сергеев А.М. О взаимосвязи одного вида квазиортогональных матриц, построенных на порядках последовательностей $4k$ и $4k-1$ // Известия СПбГЭТУ ЛЭТИ. 2017. № 7. С. 12–17.
12. Sergeev A., Sergeev M., Balonin N., Vostrikov A. Symmetry Indices as a Key to Finding Matrices of Cyclic Structure for Noise-Immune Coding // *Proceedings of the 12th KES International Conference on Intelligent Decision Technologies (KES-IDT 2020, 17–19 June 2020)*. *Smart Innovation, Systems and Technologies*. Vol. 193. Singapore: Springer, 2020. PP. 223–230. DOI:10.1007/978-981-15-5925-9_19
13. Ryser H.J. *Combinatorial Mathematics*. New York: John Wiley, 1963. 162 p.
14. Балонин Н.А., Сергеев М.Б. Расширение гипотезы Райзера на двуциклические структуры и разрешимость матриц Адамара орнаментом в виде бицикла с двойной каймой // Информационно-управляющие системы. 2017. № 1(86). С. 2–10. DOI:10.15217/issnl684-8853.2017.1.2
15. Балонин Н.А., Сергеев М.Б. К вопросу существования матриц Мерсенна и Адамара // Информационно-управляющие системы. 2013. № 5(66). С. 2–8.
16. Sergeev A., Sergeev M., Vostrikov A., Kurtyanik D. Portraits of Orthogonal Matrices as a Base for Discrete Textile Ornament Patterns // *Smart Innovation, Systems and Technologies*. 2019. Vol. 143. P. 135 – 143. DOI:10.1007/978-981-13-8303-8_12
17. Зенкин В.И. Распределение простых чисел: элементарные методы. Калининград, 2008. URL: http://regiomontan.ru/book/VZ_primes.pdf (дата обращения 14.08.2022)
18. Hall M., Jr. A Survey of Difference Sets // *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1956. Vol. 7. Iss. 6. PP. 975–986. DOI:10.2307/2033024
19. One circulant Mersenne Matrices // *Mathscinet*. URL: <http://mathscinet.ru/catalogue/CM1> (дата обращения 14.08.2022)
20. Vostrikov A., Sergeev A., Balonin Y. Using Families of Extremal Quasi-Orthogonal Matrices in Communication Systems // *Proceedings of the 13th KES Conference on Intelligent Decision Technologies (KES-IDT 2021, 14–16 June 2020)*. *Smart Innovation, Systems and Technologies*. Vol. 238. Singapore: Springer, 2021. PP. 95–108. DOI:10.1007/978-981-16-2765-1_8
21. Востриков А.А., Чернышев С.А. Об оценке устойчивости к искажениям изображений, маскированных М-матрицами // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 5(87). С. 99–103.
22. Мироновский Л.А., Слаев В.А. Стрип-метод помехоустойчивого преобразования изображений // Измерительная техника. 2006. № 8. С. 6–12.
23. Balonin Y., Vostrikov A., Sergeev M. Software for finding M-matrices // *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*. 2014. Vol. 262. P. 475–480. DOI:10.3233/978-1-61499-405-3-475
24. Григорьев Е.К. Анализ корреляционных характеристик новых кодовых последовательностей, основанных на персимметричных квазиортогональных циркулянтах // Труды учебных заведений связи. 2022. Т. 8. № 2. С. 83–90. DOI:10.31854/1813-324X-2022-8-2-83-90
25. Roshan P., Leary J. 802.11 Wireless LAN Fundamentals. Cisco Press, 2004. 312 p.

References

1. Seberry J., Yamada M. *Hadamard Matrices: Constructions using Number Theory and Linear Algebra*. Hoboken: John Wiley & Sons; 2020. 352 p.
2. Balonin N.A., Sergeev M.B. The generalized Hadamard matrix norms. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2014;2:5–11. (in Russ.)
3. Mohan M.T. p -almost Hadamard matrices and λ -planes. *Journal of Algebraic Combinatorics*. 2022;55(1):89–108. DOI:10.1007/s10801-020-00991-y

4. Mironovsky L.A., Slaev V.A. *Strip-Method for Image and Signal Transformation*. Berlin, Boston: De Gruyter; 2011. 166 p. DOI:10.1515/9783110252569
5. Seberry J., Wysocki B.J., Wysocki T.A. On some applications of Hadamard matrices. *Metrika*. 2005;62(2-3):221-239. DOI:10.1007/s00184-005-0415-y
6. Wang R. *Introduction to Orthogonal Transforms: With Applications in Data Processing and Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press; 2010. 504 p.
7. Balonin N., Vostrikov A., Sergeev M. Mersenne-Walsh Matrices for Image Processing. *Proceedings of the 8th International KES Conference on Intelligent Interactive Multimedia: Systems and Services, KES-IIMSS-15, 17-19 June 2015, Sorrento, Italy. Smart Innovation, Systems and Technologies. vol.40*. Cham: Springer; 2015. p.141-147. DOI: 10.1007/978-3-319-19830-9_13
8. Sergeev M.B., Nenashev V.A., Sergeev A.M. Nested code sequences of Barker – Mersenne – Raghavarao. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*. 2019;3(100):71-81. (in Russ.) DOI:10.31799/1684-8853-2019-3-71-81
9. Balonin N.A., Sergeev M.B. Golden ratio Matrix G_{10} . *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*. 2013;6(67):2-5. (in Russ.)
10. Balonin N.A., Vostrikov A.A., Sergeev M.B. On two predictors of calculable chains of quasi-orthogonal matrices. *Automatic Control and Computer Sciences*. 2015;49(3):153-158. DOI:10.3103/S0146411615030025
11. Sergeev A.M. The interconnection of one kind of quasi-orthogonal matrices built on the orders of sequences 4k and 4k – 1. *Proceedings of Saint Petersburg Electrotechnical University*. 2017;7:12-17. (in Russ.)
12. Sergeev A., Sergeev M., Balonin N., Vostrikov A. Symmetry Indices as a Key to Finding Matrices of Cyclic Structure for Noise-Immune Coding. *Proceedings of the 12th KES International Conference on Intelligent Decision Technologies, KES-IDT 2020, 17-19 June 2020. Smart Innovation, Systems and Technologies. vol.193*. Singapore: Springer; 2020. p. 223-230. DOI:10.1007/978-981-15-5925-9_19
13. Ryser H.J. *Combinatorial Mathematics*. New York: John Wiley; 1963. 162 p.
14. Balonin N.A., Sergeev M.B. Ryser's Conjecture Expansion for Birculant Strictures and Hadamard Matrix Resolvability by Double-Border Bicycle Ornament. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*. 2017;1(86):2-10. (in Russ.) DOI:10.15217/issn1684-8853.2017.1.2
15. Balonin N.A., Sergeev M.B. To the question of the existence of Mersenne and Hadamard matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*. 2013;5(66):2-8. (in Russ.)
16. Sergeev A., Sergeev M., Vostrikov A., Kurtyanik D. Portraits of Orthogonal Matrices as a Base for Discrete Textile Ornament Patterns. *Smart Innovation, Systems and Technologies*. 2019. Vol. 143. P. 135 – 143. DOI:10.1007/978-981-13-8303-8_12
17. Zenkin V.I. *Prime number distribution: Elementary methods*. Kaliningrad; 2008. (in Russ.) URL: http://regiomont-tan.ru/book/VZ_primes.pdf [Accessed 14th August 2022]
18. Hall M., Jr. A Survey of Difference Sets. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1956;7(6):975-986. DOI:10.2307/2033024
19. Mathscinet. *One circulant Mersenne Matrices*. URL: <http://mathscinet.ru/catalogue/CM1> [Accessed 14th August 2022]
20. Vostrikov A., Sergeev A., Balonin Y. Using Families of Extremal Quasi-Orthogonal Matrices in Communication Systems. *Proceedings of the 13th KES Conference on Intelligent Decision Technologies, KES-IDT 2021, 14-16 June 2020. Smart Innovation, Systems and Technologies. vol.238*. Singapore: Springer; 2021. p.95-108. DOI:10.1007/978-981-16-2765-1_8
21. Vostrikov A., Chernyshev S. On distortion assessment of images masking with M-matrices. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 2013;5(87):99-103. (in Russ.)
22. Mironovsky L.A., Slaev V.A. The strip method of noise-immune image transformation. *Measurement Techniques*. 2006;49:745-754. (in Russ.) DOI:10.1007/s11018-006-0183-8
23. Balonin Y., Vostrikov A., Sergeev M. Software for finding M-matrices. *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*. 2014;262:475-480. DOI:10.3233/978-1-61499-405-3-475
24. Grigoriev E. Study of Correlation Properties of New Code Sequences Based on Persymmetric Quasi-Orthogonal Circulants. *Proc. of Telecom. Universities*. 2022;8(2):83-90. (in Russ.) DOI:10.31854/1813-324X-2022-8-2-83-90
25. Roshan P., Leary J. *802.11 Wireless LAN Fundamentals*. Cisco Press; 2004. 312 p.

Статья поступила в редакцию 23.09.2022; одобрена после рецензирования 14.10.2022; принята к публикации 19.10.2022.

The article was submitted 23.09.2022; approved after reviewing 14.10.2022; accepted for publication 19.10.2022.

Информация об авторе:

СЕРГЕЕВ
Александр Михайлович

кандидат технических наук, доцент кафедры вычислительных систем и сетей Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения

 <https://orcid.org/0000-0002-4788-9869>