

ШИРОКОПОЛОСНЫЕ СИГНАЛЫ ДАННЫХ С РАСШИРЕНИЕМ СПЕКТРА ПРЯМОЙ ТРОИЧНОЙ М-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКА

С.С. Владимиров¹, О.С. Когновицкий^{1*}

¹Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича,

Санкт-Петербург, 193232, Российская Федерация

*Адрес для переписки: kogn@yandex.ru

Информация о статье

УДК 621.391

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Владимиров С.С., Когновицкий О.С. Широкополосные сигналы данных с расширением спектра прямой троичной М-последовательностью и их характеристика // Труды учебных заведений связи. 2017. Т. 3. № 3. С. 28–36.

Аннотация: Широкополосные системы характеризуются высокой помехоустойчивостью передачи данных в каналах с белым гауссовым шумом при низком соотношении сигнал/шум. Актуальной задачей является выбор широкополосных сигналов и методов их обработки на приеме. В статье анализируется возможность использования в качестве расширяющей спектр троичной М-последовательности.

Ключевые слова: расширение спектра, троичная М-последовательность, вероятность ошибки.

Введение

Современный этап развития цифровых информационно-коммуникационных систем характеризуется интенсивными разработками и внедрением широкополосных систем, которые по многим показателям перспективнее традиционных. Прежде всего, они выигрывают по помехоустойчивости при низком соотношении сигнал/шум, что, в свою очередь, обеспечивает повышенную скрытность передаваемой информации. Эти преимущества достигаются за счёт расширения спектра передаваемых сигналов.

Среди множества широкополосных систем значительную их долю составляют цифровые системы с расширением спектра прямой последовательностью (DSSS, от англ. *Direct Sequence Spread Spectrum*). В качестве расширяющих спектр последовательностей чаще всего выбирают двоичные шумоподобные последовательности максимального периода – М-последовательности [1–3].

В [4] проведен анализ характеристик широкополосных сигналов на базе двоичных М-последовательностей. Рассмотрены два возможных варианта построения широкополосной системы.

В первом один из исходных двоичных символов передаётся периодом «прямой» М-последовательности, а второй – периодом «обратной» (инверти-

рованной) М-последовательности. При этом коэффициент расширения спектра будет равен длине М-последовательности в числе $2^m - 1$ двоичных элементов, где m – степень порождающего многочлена. Таким образом, один бит информации от источника передаётся одним периодом двоичной М-последовательности.

Во втором варианте одним периодом М-последовательности передаётся m бит информации, кодируемых начальной фазой или первыми m элементами двоичной М-последовательности. При этом скорость передачи информации, по сравнению с первым вариантом, увеличивается в m раз при том же коэффициенте расширения спектра, т. е. при одинаковой скорости передачи сигналов (чипов) расширяющей спектр М-последовательности. Показано, что такое повышение скорости передачи информации в m раз приводит к снижению помехоустойчивости по сравнению с первым вариантом.

В настоящей статье рассматривается возможность расширения спектра исходных двоичных сигналов с помощью троичных М-последовательностей, которые имеют многие свойства, аналогичные свойствам двоичных М-последовательностей. Остановимся на свойствах троичных М-последовательностей более подробно.

Свойства троичных М-последовательностей

Троичные М-последовательности строятся над простым полем $GF(3)$ с множеством элементами $\{0, 1, 2\}$ и порождаются примитивным характеристическим многочленом степени m :

$$P(x) = p_0x^m - p_1x^{m-1} - p_2x^{m-2} - \dots - p_{m-1}x - p_m,$$

где $p_i \in GF(3)$.

По заданному многочлену $P(x)$ строится регистр сдвига из m троичных ячеек, который формирует М-последовательность с периодом $M = 3^m - 1$:

$$\{s\} = (s_0, s_1, s_2, \dots, s_{3^m-3}, s_{3^m-2}),$$

которой будет соответствовать рекуррентное уравнение:

$$s_{n+m} = p_1s_{n-1} + p_2s_{n-2} + \dots + p_{m-1}s_{n-m+1} + p_ms_{n-m},$$

где $s_i \in GF(3)$.

Общими структурными свойствами троичных М-последовательностей являются следующие:

1) Период троичной М-последовательности равен $M = 3^m - 1$, где m – степень характеристического многочлена $P(x)$.

2) Каждый ненулевой элемент простого поля $GF(3)$ в одном периоде М-последовательности встречается 3^{m-1} раз, а нулевой – $(3^{m-1} - 1)$ раз.

3) Любая k -элементная ($0 < k \leq m$) комбинация $(s_i, s_{i+1}, \dots, s_{i+k-1})$, кроме нулевой, в одном замкнутом в кольцо периоде троичной М-последовательности встречается ровно 3^{m-k} раз, а k -элементная серия нулей – $(3^{m-k} - 1)$ раз.

4) Недвоичные М-последовательности с характеристикой простого поля $p \geq 3$ состоят из $(p - 1)$ подпоследовательностей, каждая длительностью $M_1 = \frac{p^m - 1}{p - 1}$. При этом подпоследовательности поэлементно будут пропорциональны с коэффициентом λ , где λ – первообразные элементы простого поля $GF(p)$. Таким образом, для произвольного элемента s_k М-последовательности справедливо равенство:

$$s_{k+M_1} = \lambda s_k \pmod{p}. \quad (1)$$

Из свойства 4 следует, что троичная М-последовательность с периодом $M = 3^m - 1$ состоит из двух подпоследовательностей длиной $M_1 = \frac{1}{2}(3^m - 1)$, каждая с коэффициентом пропорциональности $\lambda = 2$, так как в простом поле $GF(3)$ это единственный первообразный элемент. Тогда уравнение (1) для троичной М-последовательности примет вид:

$$s_{k+M_1} = 2s_k \pmod{3}.$$

Так, например, троичная М-последовательность $\{s\}$, сформированная по примитивному многочлену $P(x) = x^3 + 2x + 1$, $m = 3$, и имеющая период

$M = 3^3 - 1 = 26$ при начальных элементах $(s_0, s_1, s_2) = (101)$, будет иметь вид как в таблице 1.

**ТАБЛИЦА 1. Троичная М-последовательность $\{s\}$
с $(s_0, s_1, s_2) = (101)$**

s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	...	s_{24}	s_{25}
1	0	1	2	1	1	2	0	1	1	1	0	0	2	0	2	...	0	0
1	0	1	-1	1	1	-1	0	1	1	1	0	0	-1	0	-1	...	0	0

В представленной в качестве примера троичной М-последовательности (таблица 1) первые 13 элементов являются первой подпоследовательностью, а вторые 13 элементов, начиная с 13-го, – второй. Одноименные порядковые элементы обеих подпоследовательностей имеют коэффициент пропорциональности $\lambda = 2$. Другими словами, произвольные пары элементов троичной М-последовательности, отстоящие друг от друга на 13 шагов (длину подпоследовательности), будут всегда пропорциональны с коэффициентом 2. Элементы первого ряда цифр в таблице 1 соответствуют элементам простого поля $GF(3) - \{0, 1, 2\}$ и удовлетворяют рекуррентному уравнению:

$$s_{n+3} = s_{n-2} + 2s_{n-3} \pmod{3}.$$

Второй ряд элементов эквивалентен первому ряду с заменой 2 на «-1», что дает определенные преимущества при передаче биполярных сигналов по цифровому каналу. Действительно, в плезиохронных цифровых системах при синтезировании линейных кодов ставится задача отсутствия постоянной составляющей в спектре линейных сигналов в связи с наличием в цифровом тракте регенераторов. Аналогичное требование может быть предъявлено и к цифровым широкополосным системам с расширением спектра с целью обеспечения скрытной передачи информации по каналам с гауссовым шумом при низком соотношении сигнал/шум. В этом случае троичную М-последовательность при передаче по цифровому каналу следует преобразовать в биполярную с заменой 2 на «-1». В соответствии с приведенным выше свойством 2 в одном периоде троичной М-последовательности оба ненулевых элемента имеют одинаковые вероятности, что и определяет отсутствие постоянной составляющей. Поэтому при дальнейшем анализе троичных М-последовательностей с амплитудно-импульсной манипуляцией мы будем ориентироваться на биполярные сигналы, соответствующие троичным символам 0, +1 и -1.

Корреляционные характеристики троичных М-последовательностей

Ненормированная автокорреляционная функция (АКФ) периодической троичной М-последовательности $R(k)$ при сдвиге $k = nM$, где n – целое, имеет максимум, равный периоду М-последовательности, т. е. $R(k = nM) = (3^m - 1)$. При $k \neq nM$ и k

целом значение ненормированной АКФ периодической троичной М-последовательности будет постоянным и равным $R(k \neq nM) = -(3^{m-1} + 1)$. Тогда, для рассматриваемого выше примера с $m = 3$, будем иметь $R(k = nM) = (3^m - 1) = 26$, а $R(k \neq nM) = -(3^{m-1} + 1) = -10$.

Доказательство для $k \neq nM$, где n – целое, довольно простое и приведем его для $m = 3$.

Пусть сравниваются две периодические троичные М-последовательности $\{s\}$ и $\{s'\}$, сдвинутые друг относительно друга на $k \neq nM$ шагов (элементов). Образует ещё одну троичную М-последовательность $\{s''\}$ путем умножения элементов последовательности $\{s'\}$ на коэффициент пропорциональности λ . Для нашего примера умножаем на 2, чему соответствует сдвиг периодической М-последовательности $\{s'\}$ на полпериода троичной М-последовательности, т. е. на $1/2(3^m - 1) = 13$ шагов. Наконец, сформируем четвертую троичную М-последовательность $\{s^*\}$ как линейную поэлементную сумму по mod3 двух других, а именно $\{s\}$ и $\{s''\}$. Для упрощения обозначим в последовательностях элементы с i -ым индексом как: a_i для последовательности $\{s\}$, b_i – для последовательности $\{s'\}$ и c_i – для последовательности $\{s^*\} = \{s\} + \{s''\} \pmod{3}$. В результате становится очевидным, что нули в последовательности $\{s^*\}$, т. е. $c_i = 0$, будут только в тех позициях, в которых a_i и b_i совпадают. А в соответствии с приведенным выше свойством 2 троичных М-последовательностей в одном периоде последовательности $\{s^*\}$ будет $(3^{m-1} - 1)$ нулей и $2 \cdot 3^{m-1}$ ненулевых элементов. Следовательно, в двух сравниваемых троичных М-последовательностях $\{s\}$ и $\{s'\}$ будет $(3^{m-1} - 1)$ совпадений и $(2 \cdot 3^{m-1})$ несовпадений. Таким образом, АКФ $R(k \neq nM) = (3^{m-1} - 1) - (2 \cdot 3^{m-1}) = -(3^{m-1} + 1)$, т. е. равно $R(k \neq nM) = -10$ для нашего примера с $m = 3$.

Таким образом, для троичных М-последовательностей доказано следствие:

«Автокорреляционная функция периодической троичной псевдослучайной последовательности максимальной длины с периодом $M = 3^m - 1$ при величине сдвига $k \neq nM$ будет постоянной и равной $R(k \neq nM) = -(3^{m-1} + 1)$ ».

Это свойство троичных М-последовательностей может быть использовано для повышения надёжности выделения «своей» М-последовательности, сдвинутой по фазе от возможных других М-последовательностей на величину $k \neq nM$. Это объясняется довольно большим порогом различимости от положительного максимального выброса АКФ, равного $M = 3^m - 1$ при совпадении фаз, до отрицательного значения $R(k \neq nM) = -(3^{m-1} + 1)$. При этом размах между двумя этими значениями составит $4 \cdot 3^{m-1}$.

Анализ помехоустойчивости широкополосной передачи с расширением спектра троичной М-последовательностью

Анализ помехоустойчивости системы с расширением спектра троичной М-последовательностью проведем применительно к каналу с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) и корреляционному приемнику. Оценим и сравним вероятности битовой ошибки P_b при передаче исходных двоичных сигналов без расширения спектра и сигналов с расширением спектра троичной М-последовательностью. При этом исходные двоичные сигналы могут быть импульсными униполярными и биполярными сигналами с длительностью такого сигнала T . Обозначим сигналы $S_1(t)$ для двоичной "1" и $S_2(t)$ – для двоичного "0".

Для униполярных двоичных сигналов примем, что двоичной "1" соответствует прямоугольный импульс $S_1(t) = A$, $0 \leq t \leq T$, а двоичному "0" соответствует «пассивный ноль», т. е. $S_2(t) = 0$, $0 \leq t \leq T$.

Для биполярных исходных двоичных сигналов выберем антиподные сигналы $S_1(t) = A$ и $S_2(t) = -A$, $0 \leq t \leq T$. При передаче таких сигналов по каналу с АБГШ на выходе корреляционного приемника будет иметь место случайная величина z с нормальной плотностью распределения с математическим ожиданием a_1 для $S_1(t)$ и a_2 для $S_2(t)$. Решающее устройство сравнивает оценку сигнала Z с порогом γ и выносит решение в пользу сигнала $S_1(t)$, если $z > \gamma$, или сигнала $S_2(t)$, если $z < \gamma$. Минимизация вероятности битовой ошибки достигается при оптимальном значении порога $\gamma = \frac{a_1 + a_2}{2}$.

Вероятности ошибочного решения при условии передачи сигнала $S_i(t)$ по каналу с АБГШ будут оцениваться выражением:

$$P_{\text{ош}}(S_1) = P_{\text{ош}}(S_2) = \int_{-\infty}^{\gamma} P\left(\frac{z}{S_1}\right) dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(z - a_1)^2}{2\sigma^2}\right] dz = \Phi\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma}\right);$$

где $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ – двусторонняя спектральная плотность мощности АБГШ; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$ – гауссов интеграл ошибок [5].

Проведя определенные преобразования указанных выше интегралов, получим следующие выражения для оценки битовой вероятности ошибки для униполярных сигналов, $P_{b,y}$, и биполярных двоичных сигналов, $P_{b,b}$, которые также можно встретить во многих опубликованных работах, например [2, 3]:

$$P_{b,y} = \Phi\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) \text{ и } P_{b,b} = \Phi\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right),$$

где E – пиковая энергия, которая для обоих вариантов исходных двоичных сигналов равна $E = \int_0^T s_1^2(t) dt = A^2T$.

Часто вероятность битовой ошибки определяют как функцию от средней энергии, приходящейся на один бит информации, E_b . Для биполярных двоичных сигналов $E_b = E$, поэтому выражение для вероятности битовой ошибки не изменится. Для унipoлярных сигналов средняя энергия на бит будет равна $E_b = E/2$. Поэтому вероятность битовой ошибки для унipoлярных сигналов как функция от средней битовой энергии можно записать в виде:

$$P_{b,y} = \Phi\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) = \Phi\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right).$$

Вероятность битовой ошибки для рассматриваемых биполярных двоичных сигналов будет равна:

$$P_{b,b} = \Phi\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right). \quad (2)$$

Перейдем теперь к анализу помехоустойчивости канальных сигналов, расширенных по спектру троичной M -последовательностью с периодом $M = 3^m - 1$. При этом, в качестве исходных двоичных сигналов выберем биполярные, как обеспечивающие большую помехоустойчивость, чем унipoлярные. Расширение спектра происходит благодаря тому, что каждый двоичный сигнал длительностью T будет передаваться одним периодом троичной M -последовательности. При этом троичные сигналы (чипы) будут иметь длительность $\tau = \frac{T}{M}$, т. е. произойдет расширение полосы частот в M раз.

Рассмотрим два варианта троичных сигналов – АИМ-3 и ФМ-3, и оценим их помехоустойчивость.

Троичные сигналы АИМ-3

Запишем троичные символы простого поля $GF(3)$ как 0, 1 и $2 \equiv -1 \pmod{3}$ и выберем соответствующие им сигналы: $c_1(t) = A$ для "1", $c_2(t) = A$ для "0" и $c_3(t) = (-A)$ для "2", $0 \leq t \leq \tau$. Следовательно, соответствующие энергии этих сигналов будут равны: $E_1 = E_3 = E = A^2\tau$, $E_2 = 0$. Созвездие этих троичных сигналов представлено на рисунке 1, где сигнальные точки a_1 , a_2 и a_3 являются отображением троичных сигналов $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$ соответственно. При одинаковых энергиях $c_1(t)$ и $c_3(t)$ квадрат расстояния между сигнальными точками (a_1, a_2) и (a_2, a_3) в евклидовом пространстве равняется:

$$d^2 = R_{(a_1, a_2)}^2 = R_{(a_2, a_3)}^2 = \int_0^\tau [c_1(t) - c_2(t)]^2 dt = E.$$

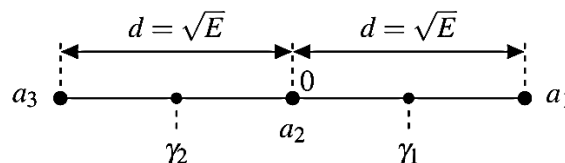


Рис. 1. Созвездие сигналов АИМ-3

Следовательно, расстояние между соседними сигнальными точками будет одинаковым и равным $d = \sqrt{E}$. В устройстве принятия решения случайная величина z с выхода коррелятора сравнивается с оптимальными порогами γ_1 и γ_2 , которые расположены на расстоянии $d/2$ от нулевой точки. Тогда вероятности ошибок в канале с АБГШ при условии передачи сигналов $c_1(t)$ и $c_3(t)$ будут одинаковыми и определяться выражением:

$$P_{\text{ош}}(c_1) = P_{\text{ош}}(c_3) = \int_{-\infty}^{\gamma_1} P(z/c_1) dz = \int_{-\infty}^{\gamma_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z - a_1}{\sigma}\right)^2\right] dz = \Phi\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma}\right).$$

Аналогично находим, что вероятность ошибочного приема сигнала $c_2(t)$ будет определяться выражением:

$$P_{\text{ош}}(c_2) = 2 \int_{\gamma_1}^{\infty} P(z/c_2) dz = \int_{\gamma_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z - a_2}{\sigma}\right)^2\right] dz = 2\Phi\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma}\right).$$

Таким образом, считая троичные сигналы равновероятными, средняя вероятность ошибочного приема троичного сигнала (чипа), как функция от пиковой энергии E , будет равна:

$$P_{\text{чипа АИМ-3}} = \frac{4}{3} \Phi\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma}\right) = \frac{4}{3} \Phi\left(\frac{\sqrt{E}}{2\sigma}\right) = \frac{4}{3} \Phi\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right). \quad (3)$$

В некоторых работах усредненную вероятность ошибочного приема чипа выражают через среднюю энергию троичного сигнала $E_{\text{ср}}$, которая для рассматриваемого варианта АИМ-3 будет равна:

$$E_{\text{ср}} = \frac{1}{3}(E_1 + E_2 + E_3) = \frac{2}{3}E.$$

Отсюда

$$E = \frac{3}{2}E_{\text{ср}}.$$

Подставив это выражение в (3), получим:

$$P_{\text{чипа АИМ-3}} = \frac{4}{3} \Phi \left(\sqrt{\frac{3E_{\text{ср}}}{4N_0}} \right). \quad (4)$$

Для сравнения различных вариантов троичных сигналов, в нашем случае АИМ-3 и ФМ-3, полученные выражения для вероятностей чиповой ошибки (3) и (4) выразить через отношение битовой энергии E_b исходного двоичного биполярного сигнала к спектральной плотности мощности шума, т. е. через E_b/N_0 .

Так как пиковая энергия троичного АИМ-3 сигнала равна:

$$E = A^2 \tau = A^2 \frac{T}{M} = \frac{E_b}{M},$$

а средняя энергия троичного сигнала АИМ-3:

$$E_{\text{ср}} = \frac{2}{3} E,$$

то выражение для вероятности ошибочного приема чипа для АИМ-3 может быть записано как:

$$P_{\text{чипа АИМ-3}} = \frac{4}{3} \Phi \left(\sqrt{\frac{1}{2M} \left(\frac{E_b}{N_0} \right)} \right). \quad (5)$$

В итоге мы приходим к несимметричному дискретному троичному каналу, модель которого представлена на рисунке 2, где вероятность p согласно [6] определяется выражением (3), (4) или (5). В такой модели принято допущение, что вероятности перехода c_1 в c_3 и наоборот пренебрежимо малы и поэтому на рисунке 2 они отсутствуют. Вместе с тем, на точности расчётов вероятностей ошибок сигналов c_1 и c_3 это не сказывается, так как вероятности переходов из c_1 в c_3 и наоборот учтены в вероятностях ошибочных переходов из c_1 в c_2 и из c_3 в c_1 .

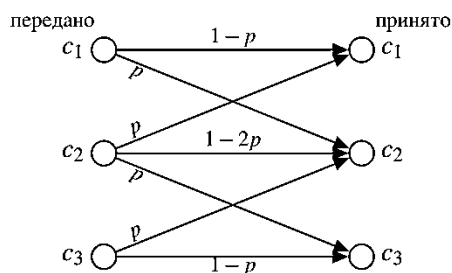


Рис. 2. Модель троичного несимметричного дискретного канала для сигналов АИМ-3

Троичные сигналы ФМ-3

Пусть символам 0, 1 и 2 простого поля $GF(3)$ соответствуют троичные сигналы:

- для 0 – $c_1(t) = A \cos(\omega_0 t)$;
- для 1 – $c_2(t) = A \cos(\omega_0 t + \Delta\varphi)$;
- для 2 – $c_3(t) = A \cos(\omega_0 t + 2\Delta\varphi)$;

где $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$.

Как и в случае АИМ-3 будем считать, что длительность сигнала ФМ-3 будет равна $\tau = T/M$, где M – период троичной М-последовательности. Тогда, после определенных преобразований можно доказать, что энергия всех трех сигналов будет одинаковой и равной:

$$E = E_1 = \int_0^\tau c_1^2(t) dt = \frac{A^2 \tau}{2}. \quad (6)$$

Проанализируем помехоустойчивость троичных сигналов ФМ-3 по модели сигнальной конструкции (рисунок 3), на которой сигнальные точки a_1 , a_2 и a_3 отображают троичные сигналы $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$ соответственно.

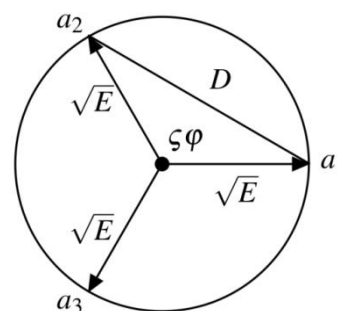


Рис. 3. Модель сигнальной конструкции для ФМ-3

В соответствии с теоремой косинусов квадрат расстояния в евклидовом пространстве между сигнальными точками a_1 и a_2 равен:

$$D^2 = 2E(1 - \cos\Delta\varphi) = 4E\sin^2 \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, $D = 2\sqrt{E}\sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3E}$.

Ошибка в приеме сигнала $c_1(t)$ произойдет, если проекция помехи на прямую, соединяющую соседние сигнальные точки, будет больше половины евклидова расстояния D . Вероятность такой ситуации при гауссовой помехе с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ будет равна:

$$P_{\text{чипа ФМ-3}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{\frac{D}{2}}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) dz = \quad (7)$$

$$= 2\Phi\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2\Phi\left(\sqrt{\frac{3E}{2N_0}}\right).$$

Учитывая (6), запишем энергию сигнала ФМ-3 через битовую энергию исходного двоичного сигнала как:

$$E = \frac{A^2 T}{2M} = \frac{E_b}{2M}.$$

Тогда выражение (7) примет вид:

$$P_{\text{чипа ФМ-3}} = 2\Phi\left(\sqrt{\frac{3}{4M}\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right). \quad (8)$$

Сигнальной конструкции для ФМ-3 соответствует модель дискретного троичного симметричного канала, граф которого представлен на рисунке 4 [7].

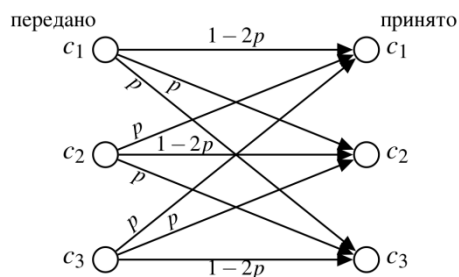


Рис. 4. Граф троичного симметричного дискретного канала для сигналов ФМ-3

Расчётные зависимости вероятности битовой ошибки для исходного биполярного двоичного сигнала (2) и вероятностей ошибочного приема троичных сигналов (чипов) для АИМ-3 и ФМ-3, формулы (5) и (8), от отношения E_b/N_0 представлены на рисунке 5.

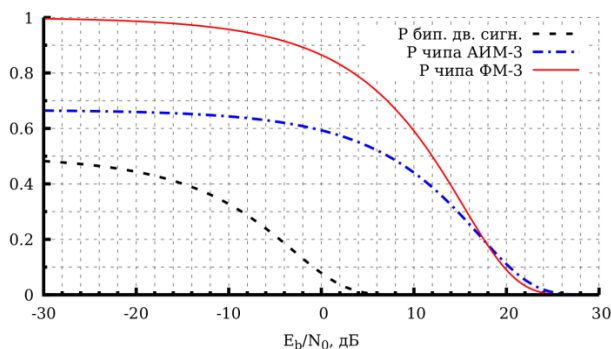


Рис. 5. Расчётные зависимости вероятности битовой ошибки для исходного биполярного двоичного сигнала и вероятностей ошибочного приема троичных чипов для АИМ-3 и ФМ-3 от отношения E_b/N_0

Варианты применения троичных М-последовательностей для расширения спектра и оценка битовой вероятности ошибки исходного сигнала

Рассмотрим **первый**, наиболее простой, вариант, когда один исходный двоичный сигнал, передается периодом одной троичной М-последовательности $\{s\}$ с периодом $M = 3^m - 1$, а другой двоичный сигнал – таким же периодом другой, сдвинутой по фазе, М-последовательности $\{r\}$. При этом последовательность $\{r\}$ будет удовлетворять тому же характеристическому многочлену $P(x)$ и, следовательно, тому же рекуррентному уравнению. При этих условиях, в соответствии со свойствами троичных М-последовательностей, расстояние

Хэмминга между последовательностями будет равно $(2 \cdot 3^{m-1})$. Следовательно, при обработке таких двух последовательностей по принципу максимального правдоподобия могут быть исправлены троичные ошибки, кратностью до $t_1 = [(2 \cdot 3^{m-1} - 1)/2]$ включительно, где « $\lfloor \cdot \rfloor$ » – целая часть дроби. Тогда в троичном дискретном канале без памяти (рисунки 2 и 4) с вероятностью ошибки чипа p_c вероятность перепутывания (ошибочного распознавания) относительно друг друга двух М-последовательностей из-за ошибок в троичном канале, а следовательно и битовая вероятность ошибки исходного двоичного сигнала $P_b^{(1)}$, будет определяться выражением:

$$P_b^{(1)} = 1 - \sum_{i=0}^{t_1} C_M^i p_c^i (1 - p_c)^{M-i}. \quad (9)$$

Подставляя в (9) выражения для вероятностей чиповой ошибки троичных сигналов АИМ-3 – (5) и ФМ-3 – (8), получим общие выражения для битовой вероятности ошибки исходного двоичного биполярного сигнала $P_{b, \text{АИМ-3}}^{(1)}$ и $P_{b, \text{ФМ-3}}^{(1)}$ для первого варианта применения троичных М-последовательностей для расширения спектра.

Рассмотрим **второй вариант**, когда один исходный двоичный сигнал, передается периодом прямой троичной М-последовательности:

$$\{s\} = (s_0, s_1, s_2, \dots, s_{3^m-3}, s_{3^m-2}),$$

а другой двоичный сигнал – периодом «инверсной» последовательности $\{r\}$, которая формируется путем добавления 1 по mod3 к каждому элементу прямой последовательности $\{s\}$. При этом последовательность $\{r\}$ будет удовлетворять уже другому составному характеристическому многочлену $G(x) = (x-1)P(x)$ и, следовательно, другому рекуррентному уравнению.

При этих условиях расстояние Хэмминга между прямой и «инверсной» последовательностями будет максимальным и равным периоду М-последовательности $M = 3^m - 1$. Следовательно, при обработке таких двух последовательностей по принципу максимального правдоподобия могут быть исправлены троичные ошибки, кратностью до $t_2 = [(3^m - 1 - 2)/2]$ включительно. Тогда в троичном дискретном канале без памяти (рисунок 2) вероятность перепутывания (ошибочного распознавания) относительно друг друга двух последовательностей из-за ошибок в троичном канале и, следовательно, битовая вероятность ошибки исходного двоичного сигнала $P_b^{(2)}$, будет определяться выражением (9), но уже при более высокой кратности исправляемых троичных ошибок.

Подставляя в (9) выражения для вероятностей чиповой ошибки троичных сигналов АИМ-3 – (5) и ФМ-3 – (8), а также величину кратности исправляемых ошибок до t_2 включительно, получим об-

щие выражения для битовой вероятности ошибки исходного двоичного биполярного сигнала $P_{b, \text{АИМ-3}}^{(2)}$ и $P_{b, \text{ФМ-3}}^{(2)}$.

Оба рассмотренных варианта характеризуются тем, что один бит данных от источника передаётся одним периодом троичной М-последовательности с периодом M . При этом скорость передачи данных от источника будет равна $R_d = \frac{1}{T}$, тогда как скорость передачи чипов будет в M раз выше, т. е. коэффициент расширения спектра будет равен M .

Рассмотрим теперь ещё один, **третий вариант** применения расширяющей троичной М-последовательности с периодом M , который позволяет при том же коэффициенте расширения спектра M и при тех же вероятностях ошибочного прима чипов с АИМ-3 и ФМ-3 увеличить скорость передачи данных R_d . Это обеспечивается тем, что передаваемая информация от источника будет кодироваться начальной фазой троичной М-последовательности с периодом $M = 3^m - 1$. При этом начальными фазами могут кодироваться двоичные комбинации от источника длиной в n двоичных символов. Наибольшее значение n определяется выражением $n = \lfloor \log_2(3^m - 1) \rfloor$, где $\lfloor x \rfloor$ – наибольшее целое, не превосходящее x .

В рассматриваемых в работе конкретных примерах выбрано $m = 3$, в этом случае значение $n = 4$. Следовательно, каждая троичная М-последовательность будет передавать 4 бита информации, что и приводит к повышению скорости передачи данных в 4 раза по сравнению с первыми двумя вариантами применения троичных М-последовательностей для расширения спектра. Так как множество М-последовательностей является эквидистантным с расстоянием Хэмминга $(2 \cdot 3^{m-1})$, то средняя вероятность битовой ошибки исходного двоичного сигнала $P_b^{(3)}$ можно определить, с учетом (9), как:

$$P_b^{(3)} = \frac{P_b^{(1)}}{n}.$$

Таким образом, третий вариант не только увеличивает скорость передачи данных, но и повышает, по сравнению с первым вариантом, достоверность передачи информации.

Во всех трёх приведенных выше вариантах длительность чипа была одинаковой, равной $\tau = T/M$, т.е. канальная скорость передачи троичных сигналов была равна $R_{\text{кан}} = 1/\tau$. В тоже время, третий вариант требовал повышения скорости работы источника в 4 раза по отношению к первым двум, что может быть не всегда возможно. Поэтому полезно рассмотреть ещё один, **четвёртый**, вариант, при котором скорость работы источника и скорость передачи данных остаются равными $R_{\text{ист}} = R_{\text{дан}} = 1/T$, но повышается помехоустойчивость широкополосной системы. Последнее достигается

за счёт уменьшения канальной скорости передачи чипов в n раз. Для этого n двоичных исходных сигналов, длительностью T каждый, передаются одним периодом троичной М-последовательности с определённой фазой, соответствующей n битам передаваемых данных. Таким образом, длительность троичного сигнала увеличивается в n раз и становится равным $\tau = nT/M$.

Тогда вероятности чиповых ошибок для сигналов АИМ-3 и ФМ-3, вместо выражений (5) и (8), принимают вид:

$$P_{\text{чипа АИМ-3}}^{(4)} = \frac{4}{3} \Phi \left(\sqrt{\frac{n}{2M} \left(\frac{E_b}{N_0} \right)} \right),$$

$$P_{\text{чипа ФМ-3}}^{(4)} = 2 \Phi \left(\sqrt{\frac{3n}{4M} \left(\frac{E_b}{N_0} \right)} \right).$$

Подставив эти выражения в формулу (9), сможем определить вероятности ошибочного распознавания троичной М-последовательности, фазой которой закодированы $n = 4$ бита информации. Поделив эти вероятности на $n = 4$, получим для этого варианта вероятности битовых ошибок $P_{b, \text{АИМ-3}}^{(4)}$ и $P_{b, \text{ФМ-3}}^{(4)}$.

Достоверность передачи данных может быть повышена, если расширение спектра проводить полупериодом троичной М-последовательности. Это будет достигаться благодаря ещё большему увеличению длительности чипа, что повышает его помехоустойчивость. Вероятности битовых ошибок рассчитываются по всем тем же формулам, что и при полном периоде М-последовательности.

Приведем сравнительную таблицу (таблица 2) рассмотренных вариантов расширения спектра двоичных биполярных сигналов длительностью T троичной М-последовательностью с периодом $M = 3^m - 1 = 26$, т. е. $m = 3$ и при отношении сигнал/шум на выходе источника $E_b/N_0 = 13$ дБ.

ТАБЛИЦА 2. Сравнительные характеристики рассмотренных методов расширения спектра двоичных биполярных сигналов данных троичной М-последовательностью

ТС	R_d	V_k	K	$P_{\text{ч}}, d$	P_b	G
1. Простая передача сигналов данных (без расширения спектра)						
двоичный	9600	9600	1		$5 \cdot 10^{-11}$	1 (100 %)
2. Расширение спектра троичной М-последовательностью с периодом $M = 3^3 - 1 = 26$						
Расширение спектра «прямой» и «инверсной» троичной М-последовательностью						
АИМ-3	9600	249600	26	0,351; $d = 12$	$8,5 \cdot 10^{-2}$	0,04 (4 %)
ФМ-3	9600	249600	26	0,438; $d = 12$	$3,28 \cdot 10^{-1}$	0,04 (4 %)

ТС	R_d	V_k	K	$P_{\text{ч}}, d$	P_b	G
Расширение спектра с увеличенной скоростью передачи данных в $n = 4$ раза при той же канальной скорости						
АИМ-3	38400	249600	26	0,351; $d = 8$	$1,48 \cdot 10^{-1}$	0,153 (15 %)
ФМ-3	38400	249600	26	0,438; $d = 8$	$2,19 \cdot 10^{-1}$	0,153 (15 %)
Расширение спектра с увеличенной длительностью чипа в $n = 4$ раза						
АИМ-3	9600	62400	6,5	0,143; $d = 8$	$1,94 \cdot 10^{-3}$	0,153 (15 %)
ФМ-3	9600	62400	6,5	0,128; $d = 8$	$9,23 \cdot 10^{-4}$	0,153 (15 %)
3. Расширение спектра полупериодом длиной $M_1 = 13$ троичной М-последовательности						
Расширение спектра полупериодом «прямой» и «инверсной» троичной М-последовательности						
АИМ-3	9600	124800	13	0,247; $d = 6$	0,023	0,077 (7,7 %)
ФМ-3	9600	124800	13	0,272; $d = 6$	0,038	0,077 (7,7 %)
Расширение спектра с увеличенной скоростью передачи данных в $n = 3$ раза при той же канальной скорости						
АИМ-3	28800	124800	13	0,247; $d = 4$	0,066	0,23 (23 %)
ФМ-3	28800	124800	13	0,272; $d = 4$	0,088	0,23 (23 %)
Расширение спектра с увеличенной длительностью чипа в $n = 3$ раза						
АИМ-3	9600	41600	4,3	0,08; $d = 4$	$8,13 \cdot 10^{-4}$	0,23 (23 %)
ФМ-3	9600	41600	4,3	0,058; $d = 4$	$1,9 \cdot 10^{-4}$	0,23 (23 %)

В таблице приняты следующие условные обозначения: **ТС** – тип сигнала в канале; R_d – скорость передачи данных (бит/с); V_k – канальная скорость передачи сигналов (сигн./сек); K – коэффициент расширения спектра; $P_{\text{ч}}$ – вероятность ошибки в чипе; d – расстояние Хэмминга; P_b – вероятность битовой ошибки; G – коэффициент использования полосы частот.

На рисунке 6 приведены сравнительные графики зависимости битовой вероятности ошибки исходного двоичного сигнала от отношения сигнал-шум (E_b/N_0) для рассмотренных вариантов расширения спектра двоичных биполярных сигналов длительностью T троичной М-последовательностью с полным периодом $M = 26$ (см. рисунок 6а) и полупериодом $M_1 = 13$ (см. рисунок 6б).

Заключение

Как показано в статье, применение троичных М-последовательностей для расширения спектра имеет существенно больше возможностей по сравнению с двоичными М-последовательностями. Троичные биполярные М-последовательности могут иметь преимущественное применение в цифровых трактах плезиохронной и синхронной иерархий, так как такие цифровые сигналы могут обеспечить более узкую требуемую частотную полосу широкополосного сигнала. Кроме того, тро-

ичные М-последовательности, по сравнению с двоичными, имеют более высокую структурную скрытность с точки зрения безопасности передачи данных.

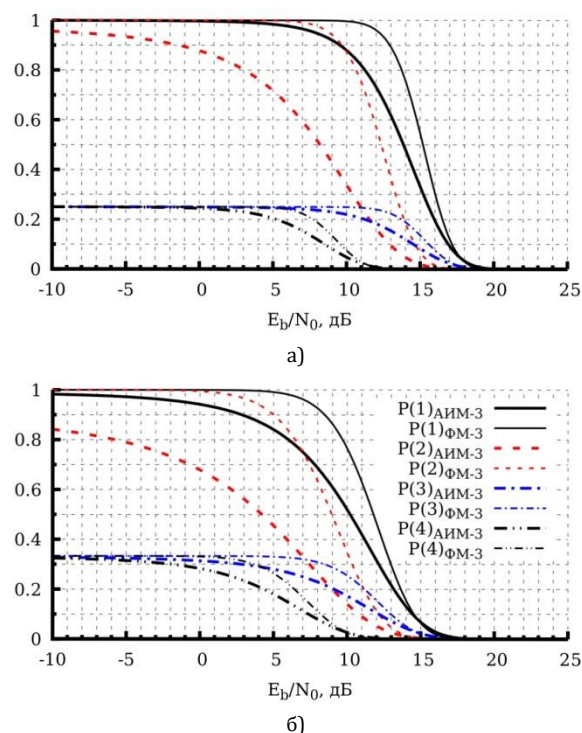


Рис. 6. Расчётные зависимости битовой вероятности ошибки исходного двоичного сигнала от отношения E_b/N_0 для рассмотренных вариантов расширения спектра двоичных биполярных сигналов

В дальнейшем будут проведены исследования других типов широкополосных последовательностей, применяемых для расширения спектра. К таким последовательностям относятся последовательности Голда [8] и ЛРД-последовательности, имеющие ряд преимуществ по сравнению с двоичными М-последовательностями. Их отличительная особенность состоит в том, что они относятся к классу составных рекуррентных последовательностей. Такие последовательности, с одной стороны, позволяют увеличить их количество и, с другой, увеличить коэффициент расширения спектра за счёт значительно больших возможных периодов последовательностей.

Кроме того, предполагается в дальнейшем провести сравнительный анализ различных методов обработки широкополосных последовательностей на приёмной стороне, обращая внимание, прежде всего, на сложность реализации и минимально достижимое время обработки таких последовательностей. Особенно интересно провести сравнение корреляционных методов, в том числе на основе согласованных цифровых фильтров, с методами обработки на основе двойственного базиса [9], позволяющего обеспечить существенные преимущества особенно для последовательностей с большим периодом.

Список используемых источников

1. Борисов В.И., Зинчук В.М., Лимарев А.Е., Шестопалов В.И. Помехозащищенность систем радиосвязи с расширением спектра прямой модуляцией псевдослучайной последовательностью. М.: РадиоСофт, 2011. 548 с.
2. Ипатов В.П. Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения. М.: Техносфера, 2007. 488 с.
3. Sklar B. Digital Communications: Fundamentals and Applications. New Jersey: Prentice Hall PTR, 2001.
4. Когновицкий О.С. Широкополосные сигналы данных с расширением спектра прямой последовательностью и их характеристика // Труды учебных заведений связи. 2016. Т. 2. № 1. С. 82–89.
5. Деев В.В. Методы модуляции и кодирования в современных системах связи. СПб.: Наука 2007. 267 с.
6. Bitouze N., Graell i Amat A. Coding for a Non-Symmetric Ternary Channel // 2009 Information Theory and Applications Workshop / IEEE. San Diego, CA, USA: IEEE. 2009. Feb. PP. 113–118.
7. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки: Пер. с англ. М: Связь, 1979. 744 с.
8. Gold R. Optimal Binary Sequences for Spread Spectrum Multiplexing // IEEE Transactions on Information Theory. 1967. Vol. 13. Iss. 4. PP. 619–621.
9. Когновицкий О.С. Двойственный базис и его применение в телекоммуникациях. СПб.: Издательство «Линк», 2009. 424 с.

* * *

WIDEBAND DATA SIGNALS WITH DIRECT TERNARY MAXIMUM LENGTH SEQUENCE SPREAD SPECTRUM AND THEIR CHARACTERISTICS

S. Vladimirov¹, O. Kognovitsky¹

¹The Bonch-Bruевич Saint-Petersburg State University of Telecommunication,
St. Petersburg, 193232, Russian Federation

Article info

Article in Russian

For citation: Vladimirov S., Kognovitsky O. Wideband Data Signals with Direct Ternary Maximum Length Sequence Spread Spectrum and their Characteristics // Proceedings of Telecommunication Universities. 2017. Vol 3. Iss. 3. PP. 28–36.

Abstract: *Wideband transmission systems have high noise immunity in white Gaussian noise channel with low signal-noise level. So, the selection of wideband signals and methods of their processing during receiving is relevant objective. This paper reviews possibility of ternary maximum length sequence spread spectrum.*

Keywords: *spread spectrum, ternary maximum length sequence, error probability.*