

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СИНТЕЗА БИЛИНЕЙНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЭНЕРГИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ (обзор)

С.В. Дворников<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Военная академия связи имени Маршала Советского Союза С.М. Буденного,  
Санкт-Петербург, 194064, Российская Федерация

\*Адрес для переписки: practcdsv@yandex.ru

## Информация о статье

УДК 621.391

Язык статьи – русский

**Ссылка для цитирования:** Дворников С.В. Теоретические основы синтеза билинейных распределений энергии нестационарных процессов в частотно-временном пространстве: обзор // Труды учебных заведений связи. 2018. Т. 4. № 1. С. 47–60.

**Аннотация:** Рассмотрены теоретические предпосылки перехода к описаниям нестационарных процессов на основе их совместных частотно-временных распределений энергии. Обоснованы причины перехода к совместным формам частотно-временных описаний. Показана роль и место функции Вигнера в классе распределений Козна. Приведены аналитические выражения и результаты экспериментов.

**Ключевые слова:** частотно-временные распределения, распределение Вигнера, обработка нестационарных процессов, аналитический сигнал, распределения класса Козна.

## Введение

Методы обработки нестационарных процессов на основе совместного представления их энергии одновременно в частотном и временном пространствах, разработанные Л. Козна [1], к середине 90-х годов прошлого столетия трансформировались в стройную теорию частотно-временных распределений (ЧВР) [2], более известную в России как теория совместного частотно-временного анализа [3-5]. Основные положения теории синтеза и обработки ЧВР достаточно хорошо проработаны и широко используются в практических приложениях радиотехники [6-27].

Дальнейшим развитием ЧВР явились билинейные аффинные распределения [20, 28-30], формируемые на основе кратномасштабных преобразований вейвлетов. К текущему моменту детально исследовано множество различных форм ЧВР, в том числе и билинейных. Вместе с тем известные недостатки ЧВР, связанные с наличием интерференционных шумов [2, 11], возникающих при обработке процессов с нестационарным изменением частотно-временных параметров, а также высокой динамикой изменения их амплитудных значений, накладывают ограничения на их применение.

К настоящему времени на практике наибольшую популярность получили простейшие ЧВР, так называемые спектрограммы, представляющие собой кратковременное или оконное преобразование Фурье [31]. Однако они не позволяют в полной мере обеспечить точное измерение частотно-временных параметров быстро изменяющихся процессов [2]. Это обусловлено тем, что уменьшение размера временного окна так, чтобы оно позволяло локализовать быстрые изменения сигнала, приводит к неизбежному снижению локализации его энергии вдоль линии мгновенных частот в соответствии с принципом неопределенности Гейзенберга [3]. Кроме того, воздействие шумов различной интенсивности приводит к ошибкам измерений параметров исследуемых сигналов.

Существенное улучшение в представлении частотно-временных характеристик нестационарных процессов обеспечивают билинейные распределения на основе вейвлетов, но алгоритмическая сложность их синтеза не позволила им занять должное место среди аналитического инструмента анализа [20]. Далее представлены этапы становления теории билинейных ЧВР, основные проблемы применения совместных распределений на практике, а также перспективы дальнейшего развития методов частотно-временного анализа.

### Теоретические предпосылки перехода к описаниям нестационарных процессов на основе их совместных частотно-временных распределений энергии

Спектральный анализ является мощным инструментом исследования нестационарных процессов (далее по тексту – сигналов), позволившим по-новому взглянуть на возможности измерения его частотных параметров.

Согласно [32] любое непрерывное колебание  $z(t)$  можно считать результатом разложения его спектра  $F(f)$  в интеграл Фурье. В комплексной системе базисных функций формулы обращения и разложения, называемые прямым и обратным преобразованием Фурье (ПФ) и (ОПФ) имеют вид:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{j2\pi ft} df; \quad (1)$$

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt.$$

Энергетический спектр и спектр мощности связаны с понятием автокорреляционной функции (АКФ)  $K_A(\tau)$ , также характеризующей энергетические свойства сигналов. Энергия АКФ определяется как интеграл свертки сигнала с его зеркальным изображением [4]. Так, если свертку двух функций  $x(t)$  и  $y(t)$  представить в виде:

$$R(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y(\tau - t)dt, \quad (2)$$

заменяя в (2) значения  $x(t)$  и  $y(t)$  на  $z(t)$  и  $z(-t)$ , то:

$$\begin{aligned} K_A(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t)z(-(\tau - t))dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t)z(t - \tau)dt. \end{aligned} \quad (3)$$

И если физический смысл свертки состоит в обработке сигнала, учитывающей его настоящее и предшествующее состояние, то АКФ есть результат обработки сигнала системой, импульсная характеристика фильтра которой представляет зеркальную копию сигнала [3, 7]. Подставляя в (3) выражение для ОПФ (1) получим:

$$K_A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} E(f)e^{j2\pi f\tau} df, \quad (4)$$

соответственно обратное преобразование дает:

$$E(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_A(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (5)$$

Связь выражений (4) и (5) определена теоремой Винера–Хинчина [3, 7]. Важным понятием, характеризующим АКФ, является интервал корреляции (рисунок 1), представляющий величину, равную ширине прямоугольного импульса той же площади, что и АКФ, при высоте, равной мощности сигнала:

$$\tau_{\text{кор}} = \frac{1}{P} \int_{-\infty}^{\infty} K_A(\tau) d\tau. \quad (6)$$

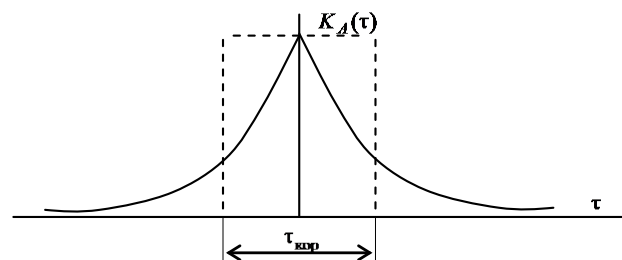


Рис. 1. Автокорреляционная функция

Поскольку АКФ есть производное значение от энергетического спектра, то она не несет информации о фазовой структуре сигнала и неоднозначно определяет его как, например, площадь фигуры не характеризует особенности ее формы [32].

Следовательно, АКФ не может рассматриваться в качестве инструмента анализа тонкой структуры сигналов. Спектр мощности и связанная с ним посредством ПФ АКФ, не всегда адекватно отображают анализируемый сигнал даже с низкой динамикой изменения параметров, т. к. дают усредненную картину распределения энергии процесса по гармоническим составляющим. Например, спектры сигналов  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$  (рисунки 2 и 3) имеют аналогичную структуру, хотя характеризуют собой различные процессы (рисунки 4 и 5), поскольку формирующие их выражения не учитывают соответствующие фазовые сдвиги.

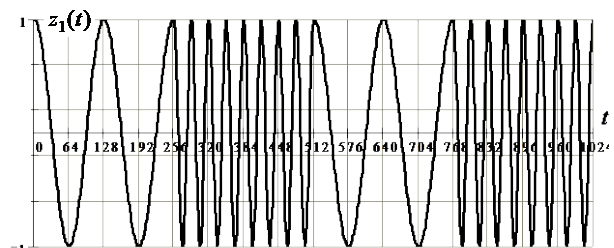


Рис. 2. Временная развертка сигнала  $z_1(t)$

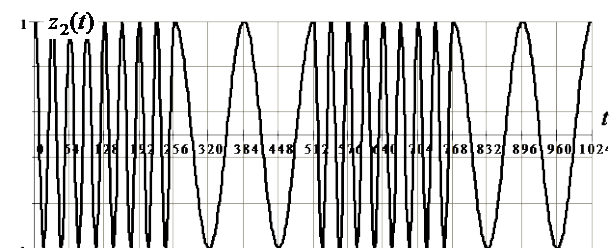
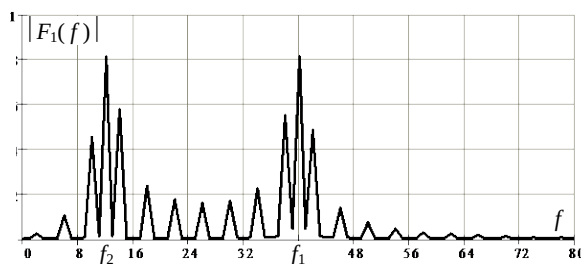
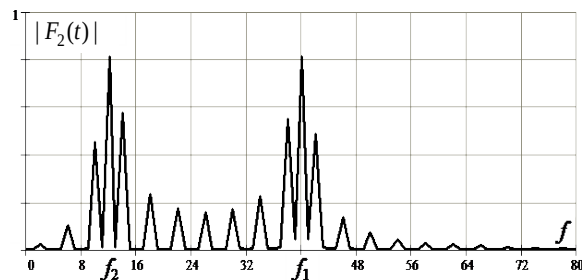


Рис. 3. Временная развертка сигнала  $z_2(t)$

Рис. 4. Спектр  $z_1(t)$  (спектральная плотность амплитуд)Рис. 5. Спектр  $z_2(t)$  (спектральная плотность амплитуд)

С позиций выбора инструмента анализа структуры сигналов гораздо больший интерес представляет текущий спектр, получаемый при переходе в (1) от бесконечных пределов к фиксированной нижней границе [3-5]:

$$F_T^{(k)}(f, t) = \int_{-\frac{T}{2}}^t z_T^{(k)}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau.$$

Здесь  $z_T^{(k)}(\tau)$  – фрагмент  $k$ -ой реализации длительностью  $T$ . Функция  $z_T^{(k)}(\tau)$  вне  $[-T/2; T/2]$  равна нулю и совпадает с текущим значением сигнала внутри его.

Разновидностью текущего спектра является мгновенный энергетический спектр, определяемый в [7] как среднее значение от множества реализаций мощности процесса  $z_T^{(k)}(\tau)$ , полученных на частоте  $f$ , на интервале  $([-T/2; t])$ :

$$E_T(f, t) = E[(F_T^{(k)}(f, t))^2] = \int_t^{t+T/2} E[z_T^{(k)}(t) z_T^{(k)}(t - \tau)] \cos(2\pi f\tau) d\tau, \quad (7)$$

где  $E$  – знак математического ожидания. С учетом (3), выражение для мгновенного энергетического спектра, переходя к пределу при  $T \rightarrow \infty$ , примет следующий вид:

$$E(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_A(t, t - \tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau. \quad (8)$$

Для (8) справедлива теорема Винера-Хинчина:

$$K_A(t, t - \tau) = 2 \int_0^{\infty} E(f, t) \cos(2\pi f\tau) df. \quad (9)$$

Текущий спектр позволяет получать сведения о сигнале  $z(t)$  только на интервале наблюдения. Переход в (1) от бесконечных к текущим моментам времени позволяет получить функцию, зависящую не только от частоты, но и от времени:

$$F^{-(+)}(f, t) = \int_{-\infty(t)}^{t(\infty)} z(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (10)$$

Величины  $F^-(f, t)$  и  $F^+(f, t)$  называются текущими спектрами или текущими спектральными плотностями [1]. Очевидно, что фиксировать можно и начальный момент времени, т. к. в анализе часто интересует не весь процесс, а его временной интервал конечной длины. Допустим, что сигнал находится на интервале  $T = t - t_2$ . Рассмотрим текущий спектр сигнала относительно его моментов:  $F^-(f, t) = \int_{-\infty}^t z(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$  – начального и  $F^-(f, t_2) = \int_{-\infty}^{t_2} z(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{t-T} z(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$  – конечного. Тогда для получения информации об интервале  $T = t_1 - t_2$  вычтем соответствующие значения текущего спектра:

$$\begin{aligned} F_z(f, t) &= \\ &= \int_{-\infty}^t z(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau - \int_{-\infty}^{t-T} z(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\ &= \int_{t-T}^t z(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

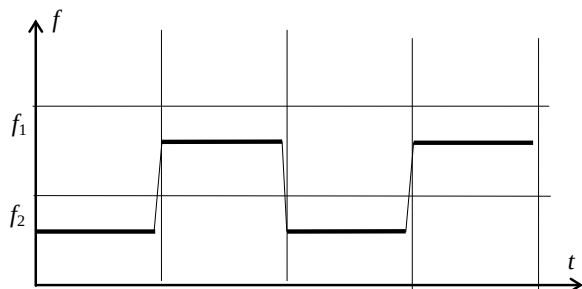
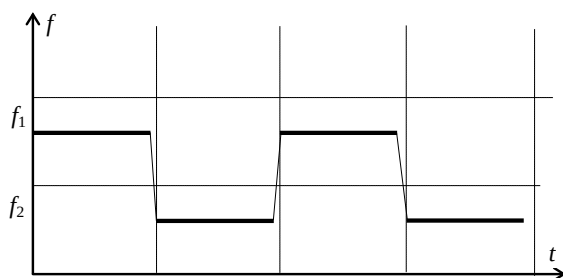
Выражение (11) в [4] трактуется как мгновенный спектр, определяемый как спектр сигнала длительностью  $T$ , предшествующий моменту времени  $t$ . Пределы интегрирования в (11) определяют положение «скользящего» временного окна на момент времени  $t$ . Очевидно, чем короче интервал анализа  $T$ , тем более адекватно отображается анализируемый процесс. Однако уменьшение  $T$  ведет к снижению частотного разрешения, что является нежелательным явлением.

Выражение (11) позволяет получить спектр процесса длительностью  $T$ , предшествующий текущему моменту времени  $t$ , т. е. имеет место, скользящее интегрирование, когда интервал наблюдения постоянной величины, перемещается по оси времени. В результате анализируемый процесс представляется в виде некоторого ЧВР. Рассмотренная операция интегрирования адекватна применению скользящей оконной функции  $h(t)$  в формуле [3]:

$$S_z(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) h(\tau - t) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau, \quad (12)$$

где  $S_z(f, t)$  – представление процесса на частотно-временном плане, называемый оконным преобразованием Фурье или спектрограммой.

Преобразование (12) более полно характеризует сигналы на интервале их наблюдения, т. к. позволяет локализовать в пределах окна  $h(t)$  фрагменты процессов с высокой или низкой нестационарностью поведения измеряемых параметров. На рисунках 6 и 7 изображены спектрограммы (квадрат  $S_z(f, t)$ ) тестовых сигналов  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$ , подтверждающие их структурные различия.

Рис. 6. Частотно-временное представление сигнала  $z_1(t)$ Рис. 7. Частотно-временное представление сигнала  $z_2(t)$ 

Концепция мгновенных спектров базируется на предположении, что в пределах окна интегрирования процесс стационарен. Причем длину интервала стационарности определяет частотное разрешение ( $\Delta FT \approx 1$ ) [31], поэтому повышение частотного разрешения неизбежно ведет к увеличению временного интервала наблюдения.

В итоге может наступить момент, когда в пределах интервала наблюдения не будет сохраняться стационарность исследуемых характеристик. В результате все особенности сигнала будут «сглажены», т. е. усреднены на длительности окна анализа. Поэтому приходится искать компромисс между величинами  $\Delta f$  и  $\Delta t$  в зависимости от того, что важнее: высокая частотная избирательность или разрешающая способность по времени.

Так, на рисунках 8 и 9 представлены «идеальное» распределение тестового сигнала нелинейной частотной модуляции  $z_{\text{тест}}(t)$  и его спектрограмма. Даже визуальный анализ результата (см. рисунок 9) показывает, что применение спектрограммы в качестве инструмента измерения мгновенной частоты позволяет получить довольно сглаженную (грубую) ее оценку, величина которой будет зависеть от размеров единичного частотно-временного окна («единичной» площадки).

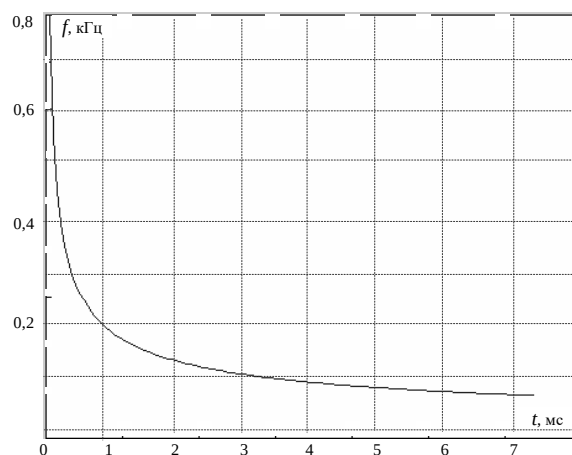


Рис. 8. Идеальное ЧВР тестового сигнала

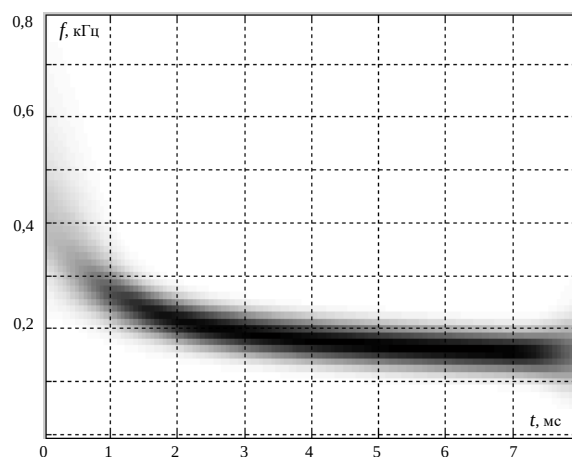


Рис. 9. Спектрограмма тестового сигнала

Стремление уйти от «сглаженной» оценки, получаемой на совокупности обработки «единичных» площадок  $\Delta FT$ , приводит к тому, что при выборе достаточно малого значения  $T$  приращение текущего спектра (10) может быть выражено через производную по времени. Дальнейшее дифференцирование полученного таким образом функционала дает распределение мгновенного спектра мощности Пейджа [33]:

$$\rho_{\Pi}(f, t) = \frac{d}{dt} |F^-(f, t)|^2. \quad (13)$$

Общность ЧВР Пейджа в том, что непосредственное интегрирование (13) дает значение мгновенной мощности сигнала [20]:

$$2 \int_0^{\infty} \rho_{\Pi}(f, t) df = P(t). \quad (14)$$

Физическая интерпретация ЧВР Пейджа имеет сложное толкование [2]. К тому же при обработке нестационарных сигналов на частотно-временной плоскости ЧВР Пейджа проявляются ложные пучности энергии, характеризующие не особенности закона изменения мгновенной частоты, а результат взаимного воздействия друг на друга сигнальных компонент (см. рисунок 10).

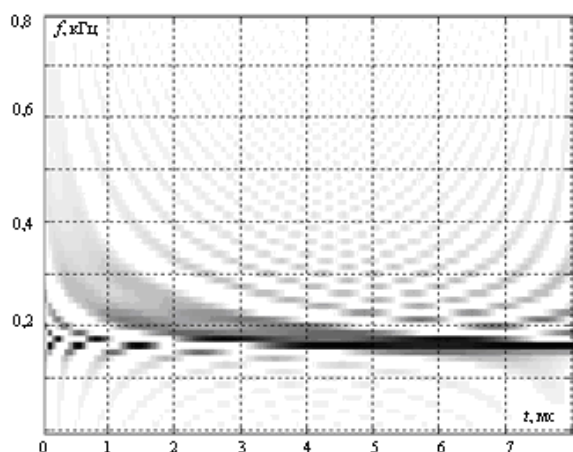


Рис. 10. ЧВР Пейджа тестового сигнала

Данный эффект ограничивает практическое применение распределения (13), но оно явилось основой для синтеза новых ЧВР. Если представить правую часть равенства (13) в виде:

$$|F^-(f, t)|^2 = |a_t^2(f) + b_t^2(f)|,$$

где

$$a_t(f) = \int_{-\infty}^t z(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau$$

и

$$b_t(f) = \int_{-\infty}^t z(\tau) \sin(2\pi f\tau) d\tau,$$

то получим:

$$\rho_n(f, t) = \frac{d}{dt} [a_t^2(f) + b_t^2(f)]. \quad (15)$$

Дифференцирование (15) дает функцию плотности распределения мгновенной энергии:

$$\rho_m(f, t) = 2z(t)[a_t(f)\cos(2\pi ft) + b_t(f)\sin(2\pi ft)]. \quad (16)$$

В [4] выражение (16) определено как распределение мгновенной энергии (РМЭ) и позволяет отслеживать характер изменения исследуемого процесса одновременно в частотной и временной области. Однако существенным его ограничением, с позиций практического применения, является неизменность разрешения так называемой «единичной» площадки  $\Delta FT$ , в пределах которой происходит усреднение плотности энергии.

На рисунке 11 представлено РМЭ  $\rho_m(f, t)$  тестового сигнала  $z_{\text{тест}}(t)$ . Анализ РМЭ показывает, что в районе  $f = 200$  Гц на его плоскости просматривается ложный пик энергии, обусловленный тем, что в пределах «единичной» площадки взаимодействовали не только близлежащие компоненты сигнала, но и находящиеся на отдаленных частотных позициях. Следовательно, для сигналов с нестационарным изменением параметров описание типа (16) не обеспечит адекватного представления.

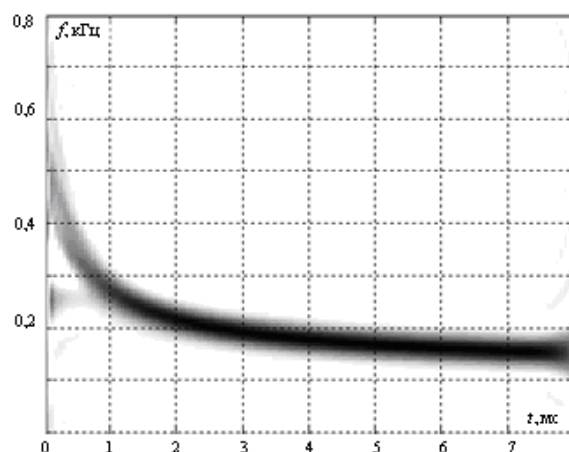


Рис. 11. ЧВР мгновенной энергии тестового сигнала

Дальнейшее развитие теории мгновенных и текущих спектров связано с понятием комплексной плотности распределения энергии, получаемой в результате комплексного произведения аналитического сигнала  $z_a(t)$  и его спектра  $F_a(f)$ :

$$\rho_R(f, t) = z_a^*(t)F_a(f)e^{j2\pi ft}. \quad (17)$$

Распределение (17) определяется как ЧВР Рихачека [34]. Его особенность состоит в использовании аналитической формы описания сигнала  $z_a(t) = z(t) + j\tilde{z}(t)$ . Здесь  $z(t)$  и  $\tilde{z}(t)$  – сигналы, связанные преобразованием Гильберта [35]:

$$z(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{z}(\tau)}{t - \tau} d\tau; \quad \tilde{z}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (18)$$

Согласно (18) различие сигналов  $z(t)$  и  $\tilde{z}(t)$  в том, что их спектральные составляющие сдвинуты относительно друг друга на  $\pi/2$ . Если представить сигнал в виде квазигармонического колебания  $z_a(t) = A(t)\exp[j\theta(t)]$ , где  $A(t) = \sqrt{z^2(t) + \tilde{z}^2(t)}$  – огибающая сигнала, а  $\theta(t) = \arctg \frac{\tilde{z}(t)}{z(t)}$  – его полная фаза (см. рисунок 12), то при таком определении  $A(t)$  и  $\theta(t)$  следует выполнение условия [5]:

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= \frac{dA(t)}{dt}; \\ \frac{d\theta(t)}{dt} &= \frac{\tilde{z}'(t)z(t) - z'(t)\tilde{z}(t)}{z^2(t) + \tilde{z}^2(t)}, \end{aligned} \quad (19)$$

т. е. сигнал совпадает с функцией огибающей  $A(t)$  в точках, где  $\theta(t_i) = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$

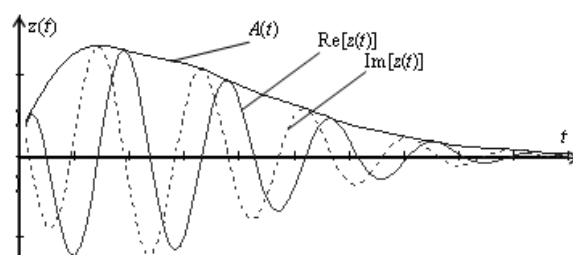


Рис. 12. Сигнал и огибающая функция



Огибающая  $A(t)$  представляет функцию, связывающую совокупность точек сигнала, в которых фаза меняет знак. В свою очередь фаза  $\theta(t)$  является функцией, характеризующей закон изменения сигнала в точках его экстремума. Тогда мгновенную частоту можно рассматривать как величину, пропорциональную скорости изменения фазы:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt}. \quad (20)$$

Из предложенного выше подхода следует, что:

$$z(t) = A(t)\cos(\theta(t)); \quad \tilde{z}(t) = A(t)\sin(\theta(t)). \quad (21)$$

Строгость выполнения (21) показана в [20].

Физическая сущность функции мгновенной частоты и огибающей принципиально отличается от понятий частоты и амплитуды, используемых для описания сигнала рядом Фурье. В ПФ сигнал представляет совокупность гармоник, частота и амплитуда которых неизменны на всем протяжении оси  $t$  от  $-\infty$  до  $\infty$ , даже если он существует только в ограниченном временном интервале. Отсутствие энергии вне этого интервала объясняется тем, что спектральные компоненты базисных гармоник в совокупности равны нулю.

С позиций описания сигнала на основе функций мгновенной частоты и огибающей, в каждый момент времени он будет иметь только одну частотную составляющую, определяемую (20), в то время как его спектр может иметь множество различных спектральных компонент. Но, в отличие от базисных функций, являющихся неизменными величинами, функции мгновенной частоты непрерывно меняются во времени.

Следующий этап развитие теории ЧВР связан с функцией активной энергии, представляющее реальную часть распределения Рихачека [34]:

$$\rho_A(f, t) = 0,5 \operatorname{Re} [\rho_R(f, t)], \quad (22)$$

которое является сглаженной версией исходного комплексного распределения энергии.

На рисунке 13 представлено  $\tilde{\rho}_A(f, t)$  – псевдо-ЧВР вида (22) тестового сигнала. Понятие псевдо предусматривает использование сглаживающего окна [2]. Особенность  $\tilde{\rho}_A(f, t)$  состоит в том, что для расчета «единичной» частотно-временной площадки в каждый момент времени задействовались только сигнальные компоненты, попадавшие во временной интервал, ограниченный функцией окна.

Поскольку РМЭ характеризуется мгновенным значением, то к нему применимо понятие огибающей, представленное функцией двух переменных – частоты и времени. В соответствии с [6], аналитическое описание огибающей функции РМЭ будет иметь следующий вид:

$$\rho_M(f, t) = \sqrt{\{\operatorname{Re}[\rho_R(f, t)]\}^2 + \{\operatorname{Im}[\rho_R(f, t)]\}^2}. \quad (23)$$

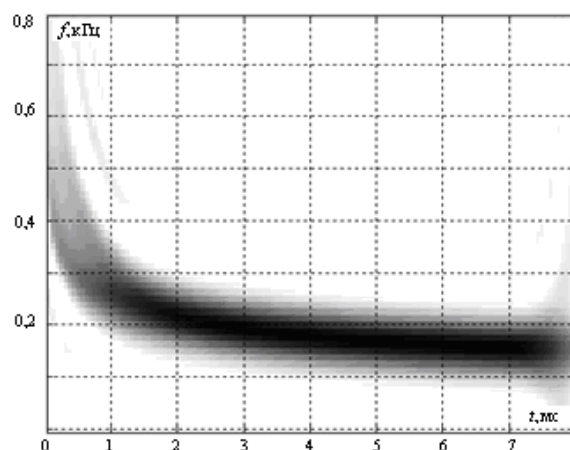


Рис. 13. Псевдо-ЧВР Рихачека тестового сигнала

Заметим, что полученные аналитические выражения для РМЭ имеют место только в отношении узкополосных сигналов, значение нижней границы спектра  $f_h$  которых значительно превышает занимаемую ими полосу частот [35]:

$$f_h > \Delta F. \quad (24)$$

В [4] уточнено понятие узкополосного сигнала. Вместо  $\Delta F \gg f_0$ , обосновано  $f_0 \geq 1,5\Delta F$ . Здесь  $f_0$  – средняя частота в спектре сигнала. Корректность использования функции огибающей РМЭ в качестве адекватного представления сигнала в частотно-временном пространстве основывается на утверждении, доказательство которого представлено в [36]. Таким образом, оценка, полученная на основе производной от функции РМЭ, является несмещенной и равна произведению производной сигнала и функции тригонометрического частотно-временного базиса.

Проведенный в [16] анализ свойств огибающей РМЭ (23) показал, что приемлемые результаты его применения в качестве инструмента анализа удается получить только для узкополосных сигналов с низкой нестационарностью параметров. Это обстоятельство обусловлено достаточно слабо выраженной степенью концентрации энергии, в пределах обрабатываемой частотно-временной области.

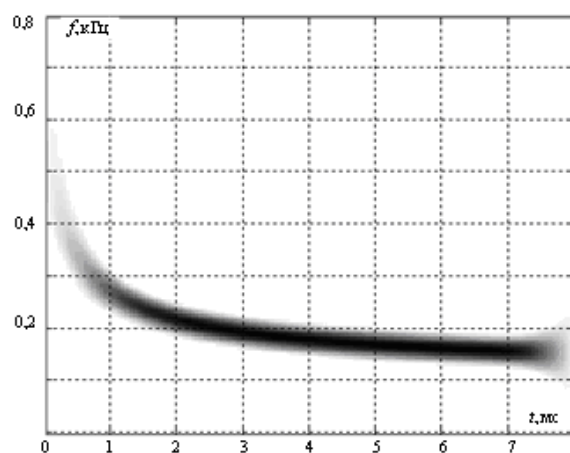


Рис. 14. ЧВР мгновенной энергии тестового сигнала

На рисунке 14 представлено РМЭ  $\rho_M(f, t)$  тестового сигнала  $z_{\text{тест}}(t)$ . Если в пределах от 1 до 7 мс (область высокой стационарности)  $\rho_M(f, t)$  позволяет локализовать энергию сигнала вдоль линии его мгновенной частоты с высокой степенью концентрации, то на интервале от 0 до 1 мс (область низкой стационарности) степень концентрации сигнальной энергии такова, что сложно судить о характере изменения мгновенной частоты.

В статистической обработке нестационарных процессов широкое применение получила функция неопределенности (ФН) Вудворда [7]. В [1] проведено подробное исследование ее свойств и обоснован подход к синтезу на основе ФН ЧВР сигналов с требуемыми характеристиками. Предлагаемый подход базируется на поиске таких двумерных описаний обрабатываемых процессов, которые в той или иной степени соответствовали бы одной из форм ФН. Для доказательства указанной правомерности воспользуемся результатами работы Клаудера о связи ФН с функциями ЧВР [14].

**Теорема 1.** Двойное ПФ от комплексной функции ЧВР энергии узкополосного сигнала совпадает с одной из форм ФН:

$\chi(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_R(f, t) \exp\{-j2\pi(\xi t - f\tau)\} df dt$ , (\*)  
учитывая, что одна из форм ФН имеет вид [3]:

$$\chi(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} z_a^*(t) z_a(t + \tau) \exp(-j2\pi\xi t) dt.$$

#### Доказательство.

Подставим в (\*) выражение для распределения Рихачека (17). В результате получим:

$$\begin{aligned} \chi(\xi, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_a^*(t) F_a(f) e^{j2\pi f t} e^{j2\pi(\xi t - f\tau)} df dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_a^*(t) F_a(f) e^{j2\pi f t} e^{-j2\pi\xi t} e^{j2\pi f \tau} df dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z_a^*(t) e^{-j2\pi\xi t} \left( \int_{-\infty}^{\infty} F_a(f) e^{j2\pi f(t+\tau)} df \right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z_a^*(t) z_a(t + \tau) \exp(-j2\pi\xi t) dt. \end{aligned}$$

Основываясь на фабуле теоремы 1 можно доказать правомерность вывода и для других видов ЧВР [7]. Однако, учитывая множество возможных форм ЧВР, целесообразно получить обобщенное описание. В [1] Козном предложено выражение (\*) (см. теорему 1) рассматривать как некоторую свертку функционального ядра преобразования  $\Phi(\tau, \xi)$  с частотной формой ФН:

$$\begin{aligned} S_\chi(\xi, \tau) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_a\left(f + \frac{\xi}{2}\right) F_a^*\left(f - \frac{\xi}{2}\right) e^{-j2\pi f \tau} df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(f, t) e^{-j2\pi(\xi t - f\tau)} df dt = \\ &= \Phi(\tau, \xi) S_\chi(\xi, \tau). \end{aligned} \quad (25)$$

С учетом того, что  $\xi$  – переменная частоты,  $\tau$  – переменная времени, преобразуем (25) к виду:

$$\rho(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\tau, \xi) S_\chi(\xi, \tau) \exp\{j2\pi(\xi t - f\tau)\} d\tau d\xi.$$

В преобразованной формуле значение  $S_\chi(\xi, \tau)$  выразим через ее временное описание:

$$S_\chi(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} z_a^*\left(v - \frac{\tau}{2}\right) z_a\left(v + \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi\xi v} dv. \quad (26)$$

В результате получим [2]:

$$\begin{aligned} \rho(f, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\tau, \xi) \left( S_\chi(\xi, \tau) \right) \times \\ &\times \exp\{j2\pi(\xi t - f\tau)\} d\tau d\xi. \end{aligned} \quad (27)$$

В окончательном виде выражение примет вид:

$$\begin{aligned} \rho(f, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{j2\pi(\xi t - f\tau - \xi v)\} \times \\ &\times \Phi(\tau, \xi) z_a^*\left(v - \frac{\tau}{2}\right) z_a\left(v + \frac{\tau}{2}\right) dv d\tau d\xi. \end{aligned} \quad (28)$$

Выражение (28) является обобщенным ЧВР Коэна. Особенностью (28) является возможность синтеза на его основе ЧВР любого вида. Для этого достаточно лишь определить форму функционального (порождающего) ядра преобразования. Так, выбор ядра вида  $\Phi(\tau, \xi) = -0,5\cos(\pi\xi\tau)$  позволяет получить плотность распределения активной энергии (22): при  $\Phi(\tau, \xi) = j\sin(\pi\xi\tau)$  – мнимую часть плотности РМЭ в (23); при  $\Phi(\tau, \xi) = \exp(j\pi\xi\tau)$  – комплексную форму РМЭ [7].

Полученные доказательства правомерности перехода к описанию сигналов от функций мгновенной частоты и фазы к функциям их огибающих, в том числе и для двумерных представлений в своей совокупности открыли возможности разработки теоретических основ синтеза билинейных ЧВР.

#### Представление сигналов на основе билинейных ЧВР плотности энергии

Фундаментальность распределения Коэна (28) определяется сохранением всех полезных свойств, синтезируемых на его основе ЧВР по отношению к их классическим формам. В этом случае результаты измерения сводятся к решению задачи оценивания или длительности воздействия сигнала на

измеритель, или определенного значения любой из его спектральных составляющих, например, средней частоты.

Анализ формы представления функции Коэна показал, что при формировании на его основе ЧВР, исходный сигнал в ней используется дважды, причем связь между его аналитическими представлениями строго линейна. Указанная особенность позволила определить, применительно к ЧВР, сформированным на основе обобщенной формы (28), понятие билинейности [10, 20, 26, 36].

С целью исследования метрологических свойств билинейных распределений, синтезированных на основе функции (28), проанализируем возможность получения оценок частотных и временных параметров сигналов, с использованием функции плотности РМЭ.

**Теорема 2.** Результат интегрирования любого совместного распределения по частоте дает среднее значение квадрата огибающей при условии  $\Phi(0, \xi) \equiv 1$ .

#### Доказательство.

Проинтегрируем распределение сигнала  $\rho(f, t)$  по частоте  $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(f, t) df$ . Учитывая, что  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi f\tau) df = \delta(\tau)$ , получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi\xi(t-v)] \Phi(0, \xi) z_a^*(v) z_a(v) dv d\xi = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-v) \cdot |z_a(v)|^2 dv = |z_a(t)|^2. \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Интегрирование любого совместного распределения по времени дает среднее значение энергии сигнала (квадрата его амплитудных значений) при условии  $\Phi(\tau, 0) \equiv 1$ .

#### Доказательство.

Проинтегрируем РМЭ сигнала  $\rho(f, t)$  по времени  $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(f, t) dt$ . С учетом  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \delta(f)$ , получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi(-\tau f)] \Phi(\tau, 0) z_a^*(v - \tau/2) z_a(v + \tau/2) dv d\tau = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\tau f} F_a^*(f) e^{-j2\pi f(v-\tau/2)} F_a(f) e^{-j2\pi f(v+\tau/2)} df dv d\tau = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi f(-\tau - 2v)] d\tau dv \right) |F_a(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) \cdot |F_a(f)|^2 df = |F_a(f)|^2 \end{aligned}$$

Анализ (28) показывает, что если ядро обобщенного преобразования не зависит от  $f$  и  $t$ , то любые сдвиги по времени или частоте в обрабатываемом процессе приводят к аналогичным сдвигам в соответствующим им билинейных распределениях. Корректный переход от взвешенных оценок мгновенной частоты и групповой задержки к их точным оценкам с использованием ЧВР класса Коэна представлен в [7].

Из всех возможных распределений для обработки сигналов целесообразно применять ЧВР, которым присущи желательные, с точки зрения частотно-временного анализа свойства, определяемые в таблице 1.

К таковым следует отнести ЧВР с ядром вида:

$$\Phi(\tau, \xi) = \exp(j2\pi\alpha\xi\tau). \quad (29)$$

и

$$\Phi(\tau, \xi) = \cos(2\pi\alpha\xi\tau), \quad (30)$$

где  $0 \leq \alpha \leq 1/2$ .

Распределения с ядрами (30) обладают всеми желательными свойствами, кроме свойства положительности на всем временном интервале их существования:  $\rho(f, t) = \rho^*(f, t)$ .

ТАБЛИЦА 1. Желательные свойства ЧВР и соответствующие им ограничения, накладываемые на ядро преобразования

| № п/п | Свойства ЧВР                                                                                                    | Ограничения, накладываемые на ядро преобразования Коэна                                                                   |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | $z_a(t - t_0) \rightarrow \rho(f, t - t_0)$                                                                     | $\Phi(\tau, \xi)$ не зависит от $t$                                                                                       |
| 2     | $F_a(f - f_0) \rightarrow \rho(f - f_0, t)$                                                                     | $\Phi(\tau, \xi)$ не зависит от $f$                                                                                       |
| 3     | $\begin{cases} z_a(t) = 0, \\ \rho(f, t) = 0, \end{cases}$ при $ t  > T$                                        | $\int \Phi(\tau, \xi) e^{j2\pi\xi\tau} d\xi = 0$ при $ \tau  < 2 t $                                                      |
| 4     | $\begin{cases} F_a(f) = 0, \\ \rho(f, t) = 0, \end{cases}$ при $ f  > \Omega/2\pi$                              | $\int \Phi(\tau, \xi) e^{-j2\pi\xi\tau} d\tau = 0$ при $ \xi  < 2 f $                                                     |
| 5     | $\rho(f, t) = \rho^*(f, t)$                                                                                     | $\Phi(\tau, \xi) = \Phi^*(-\tau, -\xi)$                                                                                   |
| 6     | $\int \rho(f, t) df =  z_a(t) ^2$                                                                               | $\Phi(0, \xi) = 1$ при всех $\xi$                                                                                         |
| 7     | $\int \rho(f, t) dt =  F_a(f) ^2$                                                                               | $\Phi(\tau, 0) = 1$ при всех $\tau$                                                                                       |
| 8     | $\frac{\int f \cdot \rho(f, t) df}{\int \rho(f, t) df} = \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{z(t)}{z^*(t)}$ | $\begin{cases} \Phi(0, \xi) = 1, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi(\tau, \xi) _{\xi=0} \end{cases}$ при всех $\xi$    |
| 9     | $\frac{\int t \cdot \rho(f, t) dt}{\int \rho(f, t) dt} = -\frac{d}{df} \operatorname{arctg} \frac{b(f)}{a(f)}$  | $\begin{cases} \Phi(\tau, 0) = 1, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(\tau, \xi) _{\xi=0} \end{cases}$ при всех $\tau$ |
| 10    | $\rho(f, t) \geq 0$ при всех $f$ и $t$                                                                          | $\Phi(\tau, \xi) - \Phi$ Н весовой функции $h(t)$                                                                         |



Особенность ядер преобразования (29) и (30) состоит в том, что выбором параметра  $\alpha$  регулируется вид самого распределения. Например,  $\alpha = 1/2$  в (29) ведет к комплексному распределению Рихачека, а  $\alpha = 0$  в (30) – к распределению Вигнера [37]:

$$\rho_W(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} z_a^* \left( t - \frac{\tau}{2} \right) z_a \left( t + \frac{\tau}{2} \right) \times \exp(-j2\pi f \tau) d\tau. \quad (31)$$

Согласно (31), функцию Вигнера можно интерпретировать как спектр сигнала вида  $s_t(\tau) = z_a^*(t - \tau/2)z_a(t + \tau/2)$ . В свою очередь  $s_t(\tau)$  является результатом свертки сигнала  $z_a(t)$  со своей комплексно сопряженной копией  $z_a^*(t)$ . Распределение (31) наиболее ярко раскрывает физическую сущность билинейности, как двойное применение сигнала.

Особенностью свертки  $s_t(\tau)$  является механизм ее реализации. Свертываемые части сдвигаются в противоположные стороны относительно друг друга на величину, равную половине дискретного значения переменных каждая (в результате взаимный сдвиг свертки равен целой величине). Следовательно, реализация билинейных ЧВР требует избыточности описания, которую можно достичь удвоением частоты дискретизации по отношению к значению, определяемому теоремой Котельникова [8, 26, 37].

Несмотря на указанные особенности синтеза, функция Вигнера имеет тесную связь с рассмотренными ранее ЧВР. В частности, Клаудер в [14] показал идентичность большинства основных свойств ФН Вудворда и характеристических функций (ХФ) ЧВР  $M(\xi, \tau)$ :

$$M(\xi, \tau) = \Phi(\tau, \xi) \int_{-\infty}^{\infty} z_a^*(t - \tau/2) z_a(t + \tau/2) \times e^{j2\pi \xi t} dt. \quad (32)$$

Условие синтеза новой ХФ не является достаточным  $M_{\text{нов}}(\xi, 0) = \Phi(\tau, \xi)M(\xi, \tau)$  [2]. Здесь  $\Phi(\tau, \xi)$  – функциональное ядро, определяющее свойство ЧВР в соответствии с (28).

Представим ФН в виде:

$$\chi(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} z_a^*(u - \tau) z_a(u) e^{j2\pi \xi u} du. \quad (33)$$

Сделав замену переменных  $u = t + \tau/2$  и  $du = dt$ , получим симметричную форму ФН, совпадающую с выражением (33) с точностью до постоянного множителя:

$$\chi(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} z_a^* \left( t - \frac{\tau}{2} \right) z_a \left( t + \frac{\tau}{2} \right) e^{j2\pi \xi t} dt, \quad (34)$$

которая связана двойным ПФ с ЧВР Вигнера:

$$\begin{aligned} \rho_W(f, t) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z_a^*(t - \tau/2) z_a(t + \tau/2) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_a^* \left( f - \frac{\nu}{2} \right) F_a \left( f + \frac{\nu}{2} \right) e^{j2\pi t \nu} d\nu, \end{aligned} \quad (35)$$

где  $F_a$  – ПФ от аналитического сигнала  $z_a$ .

Практическая ценность преобразования (31) заключается в возможности восстановления исходного сигнала и получения на его основе несмещенных оценок [20, 26].

**Теорема 4.** Из ЧВР Вигнера  $\rho_W(f, t)$  можно восстановить исходный сигнал  $z_a(t)$  с точностью до постоянного множителя  $z_a^*(0)$ .

#### Доказательство.

Пусть  $\rho_W(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} z_a^*(t - \tau/2) z_a(t + \tau/2) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$  – ЧВР Вигнера сигнала  $z_a(t)$  конечной длины. Применим к  $\rho_W(f, t)$  процедуру одномерного ОПФ:  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi f \tau) \rho_W(f, t) df$ . Тогда:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi f \tau) z_a^*(t - \tau/2) z_a(t + \tau/2) \times \\ &\quad \times \exp(-j2\pi f \tau) df d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_a^*(t - \tau/2) z_a(t + \tau/2) df d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} z_a^*(t - \tau/2) z_a(t + \tau/2) d\tau. \end{aligned}$$

Пусть  $[t_1; t_2]$  – интервал существования сигнала. Тогда для начального момента  $t_1 = 0$  получим:  $\int_0^{t_2} z_a^*(t - \tau/2) z_a(t + \tau/2) dt$ . Теперь определим  $t_2 = 2t$ , поскольку для соблюдения корректности процедур реализации функции Вигнера необходимо обеспечить избыточность описания исходного сигнала.

В результате интегрирования получим:

$$\int_0^{2t} z_a^*(t - \tau/2) z_a(t + \tau/2) d\tau = z_a^*(0) z_a(t).$$

Таким образом, сигнал восстанавливается из распределения Вигнера ОПФ с точностью до множителя  $z_a^*(0)$  на интервале  $t/2$  (относительно длительности ЧВР):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi f t) \rho_W(f, t/2) df = z_a^*(0) z_a(t). \quad (36)$$

Теорема 4 позволяет говорить о близости функции Вигнера и ФН (см. теорему 1).

Аналогичным образом можно показать правомерность преобразования:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi ft) \rho_w(f/2, t) dt = F_a^*(0) F_a(f). \quad (37)$$

Среди свойств функции Вигнера особое место занимают следующие два. Первое – сечение распределения Вигнера, заданного во временной форме, при  $f = 0$  ведет к выражению для интеграла свертки аналитического сигнала:

$$\begin{aligned} \rho_w(0, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} z_a^*(t - \tau/2) z_a(t + \tau/2) d\tau = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} z_a^*(2t - \tau) z_a(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (38)$$

Второе – сечение распределения Вигнера, заданного в частотной форме, при  $t = 0$  ведет к выражению для интеграла свертки спектра аналитического сигнала:

$$\begin{aligned} \rho_w(f, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_a^*(f - \xi/2) F_a(f + \xi/2) d\xi = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} F_a^*(2f - \xi) F_a(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (39)$$

Вместе с тем, между ФН и распределением Вигнера существуют серьезные отличия. В частности, ЧВР Вигнера любого сигнала, в том числе и комплексного, есть действительная функция, значения которой для процессов с ограниченным спектром не локализируются в начале координат частотно-временной плоскости.

По отношению к другим билинейным ЧВР класса Коэна ЧВР Вигнера характеризуется предельной концентрацией энергии сигнала вдоль линий его мгновенных частот [37]. Рассмотрим ЛЧМ-сигнал:

$$z_a(t) = A \exp(j\pi \gamma_z t^2), \quad (40)$$

где  $A$  – амплитуда;  $\gamma_z$  – скорость изменения частоты сигнала ЛЧМ.

Теперь подставим (40) в (31):

$$\begin{aligned} \rho_w(f, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A \exp(j\pi \gamma_z [t - \tau/2]^2) A \times \\ &\times \exp[j\pi \gamma_z (t + \frac{\tau}{2})^2] \exp(-j2\pi f\tau) d\tau = \\ &= |A|^2 \delta(f - \gamma_z t). \end{aligned} \quad (41)$$

Анализ полученного выражения (41) показывает, что для ЛЧМ-сигнала вида (40) функция Вигнера в каждый момент времени  $t$  предельно концентрируется вокруг его мгновенной частоты, т. е. вдоль линии, определяемой выражением  $f = \gamma_z t$ .

Для любого другого распределения разброс энергии будет более значителен, поскольку только у ЧВР Вигнера  $\Phi(\tau, \xi) \equiv 1$ . Следовательно, функция Вигнера позволяет получить лучшую оценку распределения сигнальной энергии (с точки зрения ее статистических характеристик) на частотно-временной плоскости.

Для строгого доказательства данного утверждения необходимо воспользоваться понятием глобального и локального разброса энергии [7]. Для сигнала  $z_a(t)$ , описываемого распределением  $\rho(f, t)$ , концентрацию энергии вокруг любой произвольной точки  $(f_0, t_0)$  частотно-временного пространства можно описать выражением:

$$\begin{aligned} \sigma_z(f_0, t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(t - t_0)^2 + (f - f_0)^2] \times \\ &\times |\rho(f, t)|^2 df dt, \end{aligned} \quad (42)$$

называемым *глобальным разбросом энергии* распределения  $\rho(f, t)$  вокруг точки  $(f_0, t_0)$  [7]. Наличие модуля в (42) обусловлено использованием вместо огибающей плотности РМЭ функции распределения. Для сигнала  $z_a(t)$ , описываемого  $\rho(f, t)$ , концентрацию энергии вокруг любой произвольной точки  $(f_0)$ , расположенной на линии мгновенных частот, можно характеризовать выражением [3]:

$$\sigma_{z,t_0}(f_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(f - f_0)^2] \cdot |\rho(f, t_0)|^2 df dt, \quad (43)$$

называемым *локальным разбросом энергии* распределения  $\rho(f, t)$  вокруг точки  $(f_0)$ .

**Теорема 5.** Для любого сигнала  $z_a(t)$  только его ЧВР Вигнера в произвольной точке  $(f_0, t_0)$  частотно-временного пространства имеют минимальный глобальный разброс энергии.

Доказательство.

Определим в выбранной точке  $(f_0, t_0)$  начало координат. Тогда выражение для глобального разброса примет вид:

$$\sigma_z(f_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(t)^2 + (f)^2] \times |\rho(f, t)|^2 df dt.$$

Очевидно, что значение полученного выражения определяется величиной  $\rho(f, t)$ , которая при ядре вида (29) минимальна в случае выбора  $\alpha = 0$ , соответствующего ЧВР Вигнера.

Аналогично можно доказать справедливость данного утверждения и для локального разброса  $\sigma_{z,t_0}(f_0)$ . Теорема 5 в несколько другой интерпретации доказана профессором А. Алексеевым в [7], что позволяет назвать ее *теоремой Алексеева*.

В [7] обосновано, что для некоторых видов функций ЧВР Вигнера обеспечивает лучшие пока-

затели по критерию глобального разброса в сравнении с другими ЧВР (например, реальной части функции Рихачека и т. д.) только в пределе.

Однако, несмотря на оптимальность  $\rho_W(f, t)$ , в смысле локализации энергии практическое применение ЧВР Вигнера связано с определенными сложностями. Во-первых, хотя в [4] доказано, что для узкополосных однокомпонентных сигналов вида  $z_a(t) = A(t)\exp(j\theta(t))$ ,  $\theta(t)$  – гладкая действительная функция, справедливо равенство:

$$\rho_W(f, t) = \rho_A\left(f - \frac{\theta'(t)}{2\pi}, t\right), \quad (44)$$

если  $f(t) = \theta'(t)/2\pi$ , где  $\theta'(t)/2\pi$  – в общем случае мгновенная частота, но применимость (40) справедливо обоснована лишь для фиксированного момента  $t = t_0$  в пределах длительности обрабатываемой реализации сигнала  $z(s)$ . Следовательно, для широкого класса сигналов частотный максимум ЧВР Вигнера будет смещен относительно точки мгновенной частоты.

Во-вторых, бесконечность пределов в (41) и открытость, т. е. отсутствие ограничений для операции корреляции при синтезе ЧВР, неизбежно ведут к образованию ложных выбросов энергии в частотно-временной плоскости, возникающих в результате взаимного влияния соседних сигнальных компонент друг на друга, образующих так называемый интерференционный фон [2]. Анализ ЧВР Вигнера тестового ЛЧМ-сигнала  $z_{\text{тест}}(t)$  (см. рисунок 15), указывает на наличие ложных выбросов энергии на интервале от 1,5 до 4,5 мс.

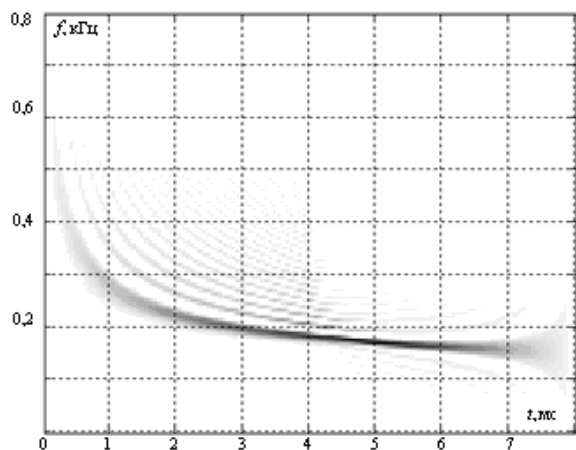


Рис. 15. ЧВР Вигнера тестового сигнала

Тем не менее, даже с учетом указанных негативных моментов распределение Вигнера может рассматриваться как базовое при формировании из (28) любого ЧВР класса Коэна, посредством операции двойной свертки с весовой функцией преобразования вида:

$$U(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi(\xi t - f\tau)\Phi(\xi, \tau)] d\xi d\tau. \quad (45)$$

**Теорема 6.** Любое ЧВР класса Коэна может быть получено через операцию двойной свертки функции Вигнера с весовой функцией преобразования вида:

$$U(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi(\xi t - f\tau)\Phi(\xi, \tau)] d\xi d\tau.$$

#### Доказательство.

В обобщенном ЧВР Коэна вычленим функцию Вигнера:

$$\begin{aligned} \rho(f, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi(\xi t - f\tau - \xi v)] \times \\ &\times \Phi(\tau, \xi) z_a^*\left(v - \frac{\tau}{2}\right) z_a\left(v + \frac{\tau}{2}\right) dv d\tau d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\tau, \xi) \left( \int_{-\infty}^{\infty} z_a^*\left(v - \frac{\tau}{2}\right) z_a\left(v + \frac{\tau}{2}\right) \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{-j2\pi\xi v} dv \right) \exp\{j2\pi(\xi t - f\tau)\} d\tau d\xi. \end{aligned} \quad (45)$$

Представление (45) запишем в виде:

$$\rho(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\tau, \xi) \rho_W(\xi, \tau) \exp\{j2\pi(\xi t - f\tau)\} d\tau d\xi,$$

где:

$$\rho_W(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} z_a^*\left(v - \frac{\tau}{2}\right) z_a\left(v + \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi\xi v} dv.$$

Тогда, обозначив через:

$$U(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi(\xi t - f\tau)\Phi(\xi, \tau)] d\xi d\tau,$$

окончательно будем иметь:

$$\rho(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(f - \xi, t - \tau) \rho_W(\xi, \tau) d\tau d\xi. \quad (46)$$

Полученная форма записи (46) для обобщенного ЧВР Коэна позволяет рассматривать любое билинейное ЧВР как «размытый» (за счет двумерной функции окна  $U(f, t)$ ) вариант ЧВР Вигнера.

Уравнение синтеза ЧВР (46) предложено Коэном в [2], но в виде теоремы, со строгой доказательной основой, было оформлено в [20]. Анализ (46) показывает, что в принципе в качестве базового распределения при синтезе новых распределений может выступать любое известное ЧВР.

**Теорема 7.** Любое ЧВР может выступать в качестве исходного описания для синтеза новых форм билинейных распределений класса Коэна.

Доказательство.

Пусть заданы два ЧВР  $\rho_g, \rho_z$  и соответствующие им ядра  $\Phi_g, \Phi_z$ . Тогда для этих ЧВР, характеристические функции имеют вид:

$$M_g(\xi, \tau) = \Phi_g(\tau, \xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\xi u} z_a^*(u - \tau/2) z_a(u + \tau/2) du;$$

$$M_z(\xi, \tau) = \Phi_z(\tau, \xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\xi u} z_a^*(u - \tau/2) z_a(u + \tau/2) du.$$

Поделив функции  $M_g(\xi, \tau)$  и  $M_z(\xi, \tau)$  друг на друга, получим следующее выражение:

$$M_g(\xi, \tau) = \frac{\Phi_g(\tau, \xi)}{\Phi_z(\tau, \xi)} M_z(\xi, \tau).$$

Учитывая, что ХФ в [3] определяется как математическое ожидание  $\exp(j2\pi(\xi t + \tau f))$  и представляется как двойное ПФ от соответствующего ей ЧВР  $M(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(\xi t + \tau f)} \rho(f, t) df dt$ , то, переходя к исходным распределениям, запишем:

$$\rho_g(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_g(\tau, \xi)}{\Phi_z(\tau, \xi)} e^{j2\pi\xi(t'-t) + j2\pi\tau(f'-f)} \times \rho_z(f', t') d\xi d\tau dt' df'.$$

Теперь полученное выражение представим в следующем виде:

$$\rho_g(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(t' - t, f' - f) \rho_z(t', f') dt' df',$$

где  $U(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_g(\tau, \xi)}{\Phi_z(\tau, \xi)} e^{j2\pi\xi t + j2\pi\tau f} d\tau d\xi$  – весовая функция (ядро преобразования).

Полученная в теореме 7 весовая функция имеет наиболее простой и удобный вид для последующего синтеза новых форм ЧВР в случае, если в качестве  $\rho_z$  выступает распределение Вигнера, поскольку только у ЧВР Вигнера  $\Phi_z(\tau, \xi) \equiv 1$ , что значительно упрощает расчет весовой функции.

Теоретической основой теоремы 7 послужили научные результаты Козна [2, 3], поэтому в [20] она определена как *теорема Козна*.

Согласно теоремам 6 и 7 формирование любого ЧВР класса Козна осуществляется взвешиванием функции (31) ядром преобразования. Поэтому все возможные формы ЧВР, синтезируемые на основе (2) представляют собой «размытые» версии распределения Вигнера.

Данное положение еще раз подчеркивает то обстоятельство, что ЧВР вида (31) обеспечивает максимальную концентрацию сигнальной энергии в континууме точек мгновенных частот в частотно-временном пространстве.

На рисунках 16–18 показаны ЧВР тестового ЛЧМ-сигнала  $z(t) = A(t)\cos[2\pi(f_1 t + \alpha_1 t^2)]$ , (здесь  $A(t)$  – амплитуда сигнала, форма которой изменяется в соответствии с функцией Гаусса,  $f_1$  – начальная частота,  $\alpha_1$  – коэффициент, определяющий скорость изменения мгновенной частоты) на основе спектрограммы, распределения Рихачека и функции Вигнера.

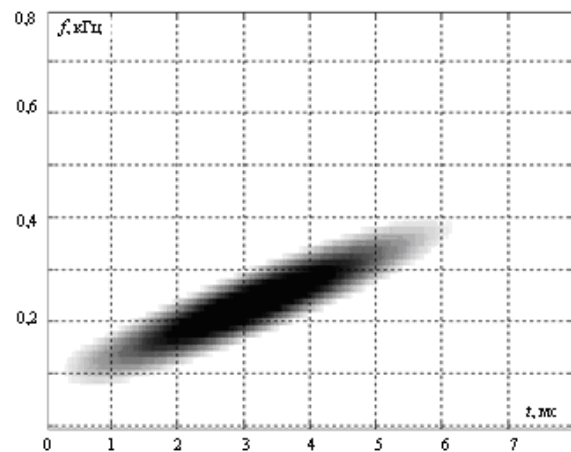


Рис. 16. Фрагмент спектрограммы тестового ЛЧМ-сигнала

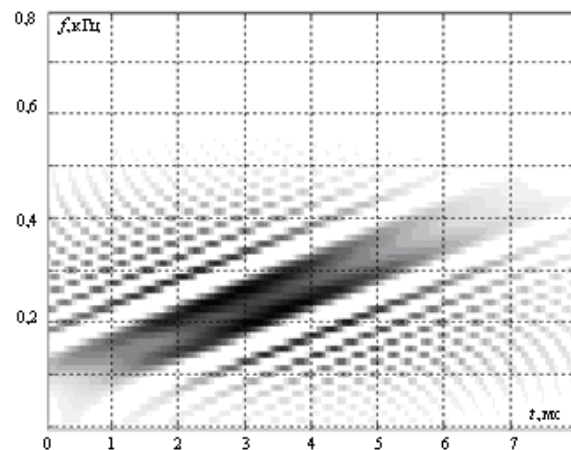


Рис. 17. Фрагмент ЧВР Рихачека тестового ЛЧМ-сигнала

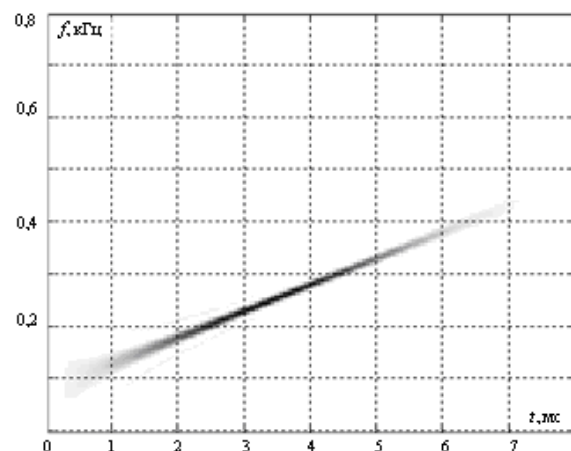


Рис. 18. Фрагмент ЧВР Вигнера тестового ЛЧМ-сигнала



### Заключение

В ходе проведенного теоретического исследования была показана:

возможность оценивания временных и частотных параметров сигналов на основе обработки их представлений функциями плотности РМЭ;

единая природа функций неопределенности и функций Вигнера;

соответствие свойств ФН и ХФ большинству полезных, с точки зрения применимости в практических приложениях, свойствам ЧВР;

восстанавливаемость сигналов из их билинейных ЧВР (полная адекватность сигналов их представлениям на основе билинейных ЧВР);

первичность ЧВР Вигнера по отношению к другим совместным ЧВР, как распределения, максимально локализирующего энергию сигналов в континууме точек его мгновенных частот;

возможность синтеза на основе функции Вигнера любых ЧВР сигналов класса Коэна;

потенциальная возможность выбора в качестве порождающего распределения любого ЧВР класса Коэна.

Представленная доказательная база позволяет рассматривать полученную совокупность аналитических результатов как теоретические основы для разработки методов реализации билинейных распределений в задачах практической радиотехники.

Вместе с тем вскрыты негативные особенности билинейных распределений, обусловленные их корреляционной природой, которые проявляются в виде ложных всплесков энергии на частотно-временной плоскости при обработке многокомпонентных сигналов и сигналов со сложной частотно-временной структурой.

Следовательно, необходимы дальнейшие исследования по поиску подходов, позволяющих минимизировать негативные последствия интерференции, а также обеспечивающие удобство проведения измерений, например, рассмотренных в [12, 37] и др.

### Список используемых источников

1. Cohen L. Generalized Phase-Space Distribution Function // J. of Mathematical Physics. 1966. Vol. 7. Iss. 5. PP. 781–786.
2. Cohen L. Time-Frequency Distribution – a Review // IEEE Trans. Signal Processing. 1989. Vol. 77. Iss. 7. PP. 941–981.
3. Cohen L. Time-Frequency Analysis. Englewood Cliffs. NJ: Prentice-Hall, 1995.
4. Алексеев А.А. Частотно-временной анализ сигналов связи и радиотехнического обеспечения. Л.: ВАС, 1987. 96 с.
5. Дворников С.В., Кудрявцев А.М. Теоретические основы частотно-временного анализа кратковременных сигналов: монография. СПб.: ВАС, 2010. 240 с.
6. Алексеев А.А., Чеченев С.Ю., Кириллов А.Б. Анализ сигналов на основе функций распределения мощности в условиях многосигнального воздействия // Радиотехника. 1993. № 10. С. 32–37.
7. Алексеев А.А., Кириллов А.Б. Технический анализ сигналов и распознавание радиоизлучений. СПб.: ВАС, 1998. 368 с.
8. Алексеев А.А., Железняк В.К., Комарович В.Ф., Дворников С.В. Автоматизированная система контроля интенсивности физических полей рассеивания сигналов // Научное приборостроение. 2000. Т. 10. № 3. С. 77–87.
9. Алексеев А.А., Аладинский В.А., Железняк В.К., Комарович В.Ф., Дворников С.В. Применение методов частотно-временной обработки акустических сигналов для анализа параметров реверберации // Научное приборостроение. 2001. Т. 11. № 1. С. 65–76.
10. Дворников С.В., Алексеева Т.Е. Распределение Алексеева и его применение в задачах частотно-временной обработки сигналов // Информация и космос. 2006. № 3. С. 9–20.
11. Choi H., Williams W. Improved Time-Frequency Representations of Multicomponent Signals Using Ex-Ponential Kernels // IEEE Trans. Acoust., Speech. Signal Proc. 1989. Vol. 43. June. PP. 862–871.
12. Дворников С.В., Сауков А.М. Модификация частотно-временных описаний нестационарных процессов на основе показательных и степенных функций. Научное приборостроение. 2004. Т. 14. № 3. С. 76–85.
13. Дворников С.В., Яхеев А.Ф. Метод измерения параметров кратковременных сигналов на основе распределения Алексеева // Информация и космос. 2011. № 1. С. 66–74.
14. Klauder J.R. The Design of Radar Signals Having Both High Range Resolution and High Velocity Resolution // Bell Sys. Tech. J. 1960. Vol. 39. PP. 809–820.
15. Дворников С.В., Железняк В.К., Храмов Р.Н., Желнин С.Р., Медведев М.В., Симонов А.Н., Сауков А.М. Метод обнаружения радиоизлучений на основе частотно-временного распределения Алексеева // Научное приборостроение. 2006. Т. 16. № 1. С. 107–115.
16. Дворников С.В., Бородин Е.Ю., Маджар Х., Махлуф Ю.Х. Частотно-временное оценивание параметров сигналов на основе функций огибающих плотности распределения их энергии // Информация и космос. 2007. № 4. С. 41–45.
17. Flandrin P. Some Features of Time-Frequency Representations of Multi-Component Signals // IEEE Int. Conf. on Acoust. Speech and Signal Proc. San Diego (CA), 1984. P. 41. B. 4.1–41. B. 4.4.
18. Дворников С.В., Осадчий А.И., Дворников С.С., Родин Д.В. Демодуляция сигналов на основе обработки их модифицированных распределений // Контроль. Диагностика. 2010. № 10. С. 46–54.
19. Baraniuk R.G. Covariant Time-Frequency Representations through Unitary Equivalence // IEEE Signal Processing Letters. 1996. Vol. 3. March No 3. PP. 79–81.
20. Дворников С.В. Теоретические основы синтеза билинейных распределений. СПб.: ВАС, 2007. 268 с.
21. Яхеев А.Ф., Дворников С.В. Измерение параметров сигналов на основе оптимизации формы распределения Алексеева // Научные технологии. 2009. Т. 10. № 1. С. 25–28.



22. Дворников С.В. Демодуляция сигналов на основе обработки их модифицированных частотно-временных распределений // Цифровая обработка сигналов. 2009. № 2. С. 7–11.
23. Auger F. Some Simple Parameter Determination Ruler for the Generalized Choi-Williams and Butter-Worth Distributions // IEEE Signal Processing Letters Jan. 1994. Vol. 1. No 1. PP. 9–11
24. Дворников С.В., Супян А.Ю., Жечев А.Г. Демодуляция сигналов методом обработки их модифицированных распределений // Информация и космос. 2009. № 1. С. 58–65.
25. Boashash B., Ristic B. Time-Varying Polyspectra and Reduced Wigner – Ville Trispectrum // SPIE. 1992. Vol. 1770.
26. Дворников С.В. Теоретические основы синтеза частотно-временных представлений класса Козна // Информация и космос. 2008. № 3. С. 16–24.
27. Дворников С.В. Проблема поиска сигналов источников информации при радиомониторинге // Мобильные системы. 2007. № 4. С. 33–35.
28. Flandrin P., Gonsalves P. Geometry of Affine Distributions // IEEE Int. Symp. Time-Frequency and Time-Scale Analysis (Philadelphia, PA, USA), Oct. 1994. PP. 80–83.
29. Rioul O., Flandrin P. Time-Scale Energy Distributions: A General Class Extending Wavelet Transforms // IEEE Trans. Signal Processing. July 1992. Vol. SP-40. PP. 1746–1754.
30. Bertrand J. and Bertrand P. A Class of Affine Wigner Functions with Extended Covariance Properties // J. Math. Phys. 1992. Vol. 33. Iss. 7.
31. Gabor D. Theory of Communication // J. Inst. Elec. Engrs Pt 111 93, November, 1946. PP. 429–457.
32. Харкевич А.А. Спектры и анализ. М.: ГИФМЛ, 1962. 236 с.
33. Page C.H. Instantaneous Power Spectra // J. Appl. Phys. 1952. No 23. PP. 103–206.
34. Rihaczek A.W. Signal Energy Distribution in Time and Frequency // IEEE Trans. on IT. 1968. Vol. 14. No 3. PP. 369–374.
35. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции: В 3-х т. М.: Сов. радио, 1972. Т. 1. 744 с.
36. Дворников С.В. Теоретические основы представления сигнала в аналитическом виде функциями его огибающей и полной фазы // Научное приборостроение. 2006. Т. 16. № 4. С. 97–102.
37. Claassen T.A.C.M., Meulenbrauker W.F.G. The Wigner Distribution a Tool for Time-Frequency Signal Analysis. Part 1, 2, 3 // Philips J. Res. 1980. Vol. 35. PP. 217–250, 276–300, 372–389.

\* \* \*

## THEORETICAL FOUNDATIONS OF THE SYNTHESIS OF BILINEAR ENERGY DISTRIBUTIONS OF NON- STATIONARY PROCESSES IN THE FREQUENCY- TEMPORARY SPACE (review)

S. Dvornikov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Telecommunications Military Academy,  
St. Petersburg, 194064, Russian Federation

### Article info

Article in Russian

**For citation:** Dvornikov S. Theoretical Foundations of the Synthesis of Bilinear Energy Distributions of Non-Stationary Processes in the Frequency-Temporary Space: Review // Proceedings of Telecommunication Universities. 2018. Vol. 4. Iss. 1. PP. 47–60.

**Abstract:** *The theoretical prerequisites for the transition to descriptions of nonstationary processes on the basis of their joint time-frequency energy distributions are considered. The reasons for the transition to joint forms of time-frequency descriptions for nonstationary processes are substantiated. The role and place of the Wigner function in the class of Cohen distributions are shown. Analytical expressions and experimental results are presented.*

**Keywords:** *time-frequency distributions, Wigner distribution, processing of non-stationary processes, analytical signal, Cohen class distributions.*