УДК 537.862

DOI:10.31854/1813-324X-2021-7-3-47-54

Возбуждение кругового бесконечного импедансного цилиндра внутренними сторонними токами: дальняя зона излучения

М.С. Проценко^{1*}

¹Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича Санкт-Петербург, 193232, Российская Федерация

Информация о статье

Поступила в редакцию 10.07.2020 Принята к публикации 12.07.2021

Ссылка для цитирования: Проценко М.С. Возбуждение кругового бесконечного импедансного цилиндра внутренними сторонними токами: дальняя зона излучения // Труды учебных заведений связи. 2021. Т. 7. № 3. С. 47–54. DOI:10.31854/1813-324X-2021-7-3-47-54

Аннотация: Рассмотрена методика решения задачи о возбуждении круглого бесконечного импедансного цилиндра внутренними сторонними токами с произвольной пространственной ориентацией. Формальное решение задачи получено на основе методов разложения полей по полной системе собственных функций и сшивания полей. Произвольное распределение сторонних токов учитывается коэффициентами возбуждения. Представлено приближенное решение задачи в дальней зоне. Исследовано влияние диэлектрического цилиндра на диаграмму направленности аксиального электрического диполя.

Ключевые слова: цилиндр, импедансный цилиндр, возбуждение цилиндра, цилиндрические координаты, электромагнитное поле, сторонний ток, ближняя зона излучения, дальняя зона излучения.

Введение

Ряд задач инженерно-технического и научно-исследовательского характера предполагает обоснование моделей электродинамических систем в средах с потерями (импедансных, диссипативных и т. д.). Моделирование среды заложения в этих задачах требует учета степени детализации геометрии объектов, а также характера возбуждения системы от практических целей применения модели. Электродинамические модели в виде цилиндрических структур рассматривались исследователями с середины прошлого века [1-4] и до настоящего времени применяются в широком спектре практических приложений, в том числе в области конструирования антенн, функционирующих в полупроводящих средах. Цилиндрические модели применяют с целью исследования распространения электромагнитных волн в различных канализирующих средах, шахтах, тоннелях, каналах подземной радиосвязи и т. п. [5-12]

Методология решения подобной задачи основывается на представлении электромагнитных полей в цилиндрической системе координат, описании процесса возбуждения поля сторонними токами и определении поля в различных областях модели за счет удовлетворения граничным условиям на

поверхностях модели. Результаты решения задач представляют как в аналитическом, так и в численном виде в зависимости от дальнейшего их использования в практике построения электродинамических систем.

Целью настоящей работы является формализация решения электродинамической задачи о возбуждении кругового импедансного цилиндра внутренними (по отношению к поверхности цилиндра) сторонними электрическими и магнитными токами произвольной ориентации для дальнейшего анализа посредством как численного, так и аналитического математического аппарата. А также, на основе полученной модели, выполнить исследование эволюции диаграммы направленности аксиального электрического диполя, расположенного в импедансном круговом цилиндре бесконечной длины.

1. Представление электромагнитного поля сторонних источников в круговых цилиндрических координатах

Выражения для электромагнитных полей заданных электрических и магнитных токов в неограниченном однородном изотропном пространстве в круговых цилиндрических координа-

^{*}Адрес для переписки: protsenkoms@gmail.com

тах r, ϕ , z могут быть представлены в следующем виде (продольные компоненты поля) [1]:

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{h=-\infty}^{\infty} E_{znh} dh, \quad H_z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\kappa=-\infty}^{\infty} H_{znh} dh, \quad (1)$$

$$E_{znh} = e^{-ihz - in\phi} \begin{cases} F_1^{\circ}(h) J_n(vr), & r < r' \\ F_2^{\circ}(h) H_n^{(2)}(vr), & r > r' \end{cases}$$
(2)

$$H_{znh} = e^{-ihz - in\phi} \begin{cases} F_1^{M}(h)J_n(vr), & r < r' \\ F_2^{M}(h)H_n^{(2)}(vr), & r > r' \end{cases}$$
(3)

$$F_s^{\mathfrak{s}}(h) = \frac{1}{8\pi i} \int_{V} \left\{ \frac{k^2 - h^2}{i\omega \varepsilon_a'} j_z^{\mathfrak{s}} R_n(\nu r') + \right.$$
$$+ \left[\frac{h}{\omega \varepsilon'} j_{\phi}^{\mathfrak{s}} - j_r^{\mathfrak{m}} \right] \times \frac{in}{r'} R_n(\nu r') +$$
(4)

$$+\left[\frac{h}{\omega\varepsilon'_{n}}j_{r}^{3}+j_{\phi}^{\mathrm{M}}\right] \nu R'_{n}(\nu r')\right\} e^{ihz'+in\phi'}d\nu,$$

$$F_s^{\mathrm{M}}(h) = \frac{1}{8\pi i} \int_{V} \left\{ \frac{k^2 - h^2}{i\omega \mu'_a} j_z^{\mathrm{M}} R_n(\nu r') + \right.$$

$$+\left[\frac{h}{\omega\mu'_{a}}j_{\phi}^{M}+j_{r}^{3}\right]\times\frac{in}{r'}R_{n}(\nu r')+\tag{5}$$

$$+\left[\frac{h}{\omega\mu'_{a}}j_{\phi}^{\mathsf{M}}-j_{\phi}^{\mathsf{B}}\right] \sim r'^{\mathsf{N}_{n}}(vr') + \left[\frac{h}{\omega\mu'_{a}}j_{r}^{\mathsf{M}}-j_{\phi}^{\mathsf{B}}\right] vR'_{n}(vr') e^{ihz_{l}+in\phi'}dv,$$

$$v = -i\sqrt{h^{2}-k^{2}}, \qquad (6)$$

где r', φ' , z' – координаты стороннего источника тока; i – мнимая единица; \vec{E} – вектор напряженности электрического поля; \vec{H} – вектор напряженности магнитного поля; F_S^9 , F_S^M – спектральные плотности электрических и магнитных эквивалентных токов; $\overrightarrow{I^3}$, $\overrightarrow{I^M}$ – векторы объемной плотности сторонних электрических и магнитных токов соответственно; ϵ'_a – комплексная диэлектрическая проницаемость среды; μ'_a - комплексная магнитная проницаемость среды; k – волновое число; ω – циклическая (круговая) частота.

В выражениях (4) и (5) при
$$s=1$$
 $R_n(vr')=H_n^{(2)}(vr')$, а при $s=2$ $R_n(vr')=J_n(vr')$.

Выражения (1) представляют собой бесконечный спектр цилиндрических волн, распространяющихся в радиальном направлении и модулированных по оси z. При r>r' спектр волн, для которых $h^2 < k^2$, является распространяющимся, а спектр волн, для которых $h^2 > k^2$, – затухающим.

Поперечные компоненты поля, посредством продольных, принимают вид (7); тогда, с учетом разделения полей на классы: для полей класса $\boldsymbol{E}(H_z=0)$ – (8) и для полей класса $\boldsymbol{H}(E_z=0)$ – (9):

$$E_{r} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{h=-\infty}^{\infty} E_{rnh} dh, H_{r} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{h=-\infty}^{\infty} H_{rnh} dh$$

$$E_{\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{h=-\infty}^{\infty} E_{\phi nh} dh, H_{\phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{h=-\infty}^{\infty} H_{\phi nh} dh,$$
(7)

$$E_{rnh}^{9} = \frac{-ih}{k^{2} - h^{2}} \frac{\partial E_{znh}}{\partial r}, H_{rnh}^{9} = \frac{i\omega \varepsilon'_{a}}{k^{2} - h^{2}} \frac{1}{r} \frac{\partial E_{znh}}{\partial \varphi},$$

$$E_{\phi nh}^{9} = \frac{-ih}{k^{2} - h^{2}} \frac{1}{r} \frac{\partial E_{znh}}{\partial \varphi}, H_{\phi nh}^{9} = \frac{-i\omega \varepsilon'_{a}}{k^{2} - h^{2}} \frac{\partial E_{znh}}{\partial r},$$
(8)

$$E_{rnh}^{\mathsf{M}} = \frac{-i\omega\mu_{\mathsf{a}}'}{k^{2} - h^{2}} \frac{1}{r} \frac{\partial H_{znh}}{\partial \Phi}, H_{rnh}^{\mathsf{B}} = \frac{i\omega\varepsilon_{\mathsf{a}}'}{k^{2} - h^{2}} \frac{1}{r} \frac{\partial E_{znh}}{\partial \Phi},$$

$$E_{\Phi nh}^{\mathsf{M}} = \frac{i\omega\mu_{\mathsf{a}}'}{k^{2} - h^{2}} \frac{\partial H_{znh}}{\partial r}, H_{\Phi nh}^{\mathsf{M}} = \frac{-i\omega\varepsilon_{\mathsf{a}}'}{k^{2} - h^{2}} \frac{1}{r} \frac{\partial H_{znh}}{\partial \Phi}.$$
(9)

2. Формальное решение задачи о возбуждении бесконечного полупроводящего кругового цилиндра внутренними сторонними источниками поля

Геометрия задачи представлена на рисунке 1, где ось цилиндра совмещена с осью z цилиндрической системы координат, а - радиус цилиндра. Макроскопические параметры материала цилиндра - σ, ε_a, μ_a. Цилиндр окружен бесконечным изотропным пространством с параметрами σ_1 , ε_a , μ_а. Сторонние источники расположены внутри цилиндра на расстоянии b от начала координат.

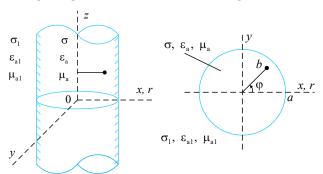


Рис. 1. Геометрия задачи о возбуждении бесконечного кругового полупроводящего цилиндра сторонними токами произвольной ориентации

Fig. 1. The Geometry of the Problem of the Excitation of an Infinite Circular Semi-Conducting Cylinder by External Currents of Arbitrary Orientation

С учетом геометрии задачи далее рассматривают две области: внутреннюю и внешнюю к поверхности цилиндра. Поле в каждой точке внутреннего пространства записывают в виде суперпозиции падающего (первичного) и отраженного (вторичного) полей, а во внешней области - в виде прошедшего поля. Поле, отраженное от цилиндра и прошедшее через границу раздела, определяют следующим образом (10). Функции $F_1^{\mathfrak{d}}$ отр(h), $F_2^{\mathfrak{d}}$ представляют собой спектральные плотности электрических и магнитных эквивалентных токов, наведенных на поверхности цилиндра сторонним источником поля.

$$E_{z}^{\text{orp}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{h=-\infty}^{\infty} E_{znh}^{\text{orp}} dh, E_{z}^{\text{np}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{h=-\infty}^{\infty} E_{znh}^{\text{np}} dh,$$

$$H_{z}^{\text{orp}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{h=-\infty}^{\infty} H_{znh}^{\text{orp}} dh, H_{z}^{\text{np}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{h=-\infty}^{\infty} H_{znh}^{\text{np}} dh,$$

$$(10)$$

где

$$E_{znh}^{\text{orp}} = e^{-ihz - in\phi} F_1^{\text{o orp}}(h) J_n(\nu r), \tag{11}$$

$$E_{znh}^{\pi p} = e^{-ihz - in\phi} F_2^{9 \pi p}(h) H_n^{(2)}(\nu_1 r), \tag{12}$$

$$H_{znh}^{\text{orp}} = e^{-ihz - in\phi} F_1^{\text{M} \text{ np}}(h) J_n(\nu r), \qquad (13)$$

$$H_{znh}^{\text{np}} = e^{-ihz - in\phi} F_2^{\text{M ortp}}(h) H_n^{(2)}(\nu_1 r).$$
 (14)

Так как для внутренней области цилиндра отраженные поля в центре не должны обращаться в бесконечность в выражениях (11) и (13), функции $F_s^{\mathfrak{I}}(h)$ и $F_s^{\mathfrak{I}}(h)$ записывают в виде (4) и (5) с индексом s=1, а для внешнего пространства выражения (12) и (14) – s=2. Переменные \mathfrak{V} и \mathfrak{V}_1 определяют выражением (6) с волновым числом соответствующим рассматриваемой области пространства.

При условии однородности поверхностного импеданса границы раздела, спектральные плотности $F_1^{\mathfrak{I}}$ отр(h), $F_2^{\mathfrak{I}}$ пр(h), $F_1^{\mathfrak{M}}$ отр(h) и $F_2^{\mathfrak{M}}$ пр(h) выражают посредством спектральных плотностей сторонних токов:

$$F_1^{\mathfrak{I} \text{ orp}}(h) = C_n^{\mathfrak{I}}(h)F_2^{\mathfrak{I}}(h), F_2^{\mathfrak{I} \text{ np}}(h) = C_n^{\mathfrak{I}}(h)F_2^{\mathfrak{I}}(h), F_2^{\mathfrak{I} \text{ orp}}(h) = D_n^{\mathfrak{I}}(h)F_2^{\mathfrak{I}}(h), F_2^{\mathfrak{I} \text{ np}}(h) = D_n^{\mathfrak{I}}(h)F_2^{\mathfrak{I}}(h).$$
(15)

Функции $F_2^{\mathfrak{s}}(h)$ и $F_2^{\mathfrak{m}}(h)$ вычисляют с помощью выражений (4) и (5), причем выбирается индекс s=2, т. к. наведенные на поверхности цилиндра токи внешние по отношению к сторонним.

Падающее поле на границу раздела характеризуется формулами (2) и (3) при r = a:

$$E_{znh}^{\Pi a \mu} = e^{-ihz - in\phi} F_2^{\theta}(h) H_n^{(2)}(\nu a),$$
 (16)

$$H_{znh}^{\text{пад}} = e^{-ihz - in\phi} F_2^{\text{M}}(h) H_n^{(2)}(va).$$
 (17)

Для определения неизвестных величин $C_n^{\rm o}(h)$, $C_n^{\rm m}(h)$, $D_n^{\rm o}(h)$ и $D_n^{\rm m}(h)$, используют граничные условия на поверхности цилиндра, указывающие на непрерывность тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей. При этом для магнитных и электрических полей граничные условия удовлетворяются раздельно. Учитывая (8) и (9), граничные условия при r=a принимают вид: для электрических (18) и для магнитных волн (19):

$$E_{znh}^{\text{пад}} + E_{znh}^{\text{отр}} = E_{znh}^{\text{пр}},$$

$$\frac{-i\omega\varepsilon_a'}{k^2 - h^2} \frac{\partial E_{znh}^{\text{пад}}}{\partial r} + \frac{-i\omega\varepsilon_a'}{k^2 - h^2} \frac{\partial E_{znh}^{\text{orp}}}{\partial r} = \frac{-i\omega\varepsilon_{a1}'}{k_1^2 - h^2} \frac{\partial E_{znh}^{\text{пр}}}{\partial r},$$
(18)

$$H_{znh}^{\Pi a \mu} + H_{znh}^{\text{orp}} = H_{znh}^{\Pi p},$$

$$\mu'_{a} \frac{\partial H_{znh}^{\Pi a \mu}}{\partial r} + \mu'_{a} \frac{\partial H_{znh}^{\text{orp}}}{\partial r} = \mu_{0} \frac{\partial H_{znh}^{\Pi p}}{\partial r}.$$
(19)

После подстановки (10)–(17) в (18) и (19) (штрих в индексе функций Ханкеля и Бесселя означает первую производную, соответственно) получают системы уравнений: для электрических волн (20) и для магнитных (21):

$$\begin{cases} H_n^{(2)}(va) + C_n^0(v)J_n(va) = C_n^{\Pi}(h)H_n^{(2)}(v_1a) \\ H_n^{(2)'}(va) + C_n^0(v)J_n'(va) = Z^3C_n^{\Pi}(h)H_n^{(2)'}(v_1a) \end{cases}$$
(20)

$$\begin{cases} H_n^{(2)}(va) + D_n^{0}(h)J_n(va) = D_n^{\Pi}(h)H_n^{(2)}(v_1a) \\ H_n^{(2)'}(va) + D_n^{0}(h)J_n'(va) = Z^{M}D_n^{\Pi}(h)H_n^{(2)'}(v_1a) \end{cases}$$
(21)

где
$$Z^{\scriptscriptstyle 3}=rac{k^2-h^2}{k_1^2-h^2}rac{arepsilon_{\rm a1}\prime}{arepsilon_{\rm a}\prime}$$
 и $Z^{\scriptscriptstyle {
m M}}=rac{k^2-h^2}{k_1^2-h^2}rac{\mu_{\rm a1}\prime}{\mu_{\rm d}\prime}$

Решение (20) и (21) относительно искомых коэффициентов $C_n^{o}(h)$, $C_n^{\pi}(h)$, $D_n^{o}(h)$ и $D_n^{\pi}(h)$ принимает вид:

$$C_n^0(h) = \frac{Z^3 H_n^{(2)}(va) H_n^{(2)'}(v_1 a) - H_n^{(2)}(v_1 a) H_n^{(2)'}(va)}{J_n(va) H_n^{(2)'}(v_1 a) - Z^3 H_n^{(2)}(v_1 a) J_n'(va)}, \quad (22)$$

$$C_n^{\Pi}(h) = \frac{J_n(\nu a)H_n^{(2)'}(\nu a) - J_n'(\nu a)H_n^{(2)}(\nu a)}{J_n(\nu a)H_n^{(2)'}(\nu_1 a) - Z^{3}H_n^{(2)}(\nu_1 a)J_n'(\nu a)},$$
 (23)

$$D_n^o(h) = \frac{Z^M H_n^{(2)}(\nu a) H_n^{(2)'}(\nu_1 a) - H_n^{(2)}(\nu_1 a) H_n^{(2)'}(\nu a)}{J_n(\nu a) H_n^{(2)'}(\nu_1 a) - Z^M H_n^{(2)}(\nu_1 a) J_n'(\nu a)}, \quad (24)$$

$$D_n^{\Pi}(h) = \frac{J_n(va)H_n^{(2)'}(va) - J_n'(va)H_n^{(2)}(va)}{J_n(va)H_n^{(2)'}(v_1a) - Z^{M}H_n^{(2)}(v_1a)J_n'(va)}.$$
 (25)

Учитывая полученные выражения, продольные компоненты электрического и магнитного полей записывают в виде выражений: для внешней области (26), (27) и для внутренней области (28), (29). Поперечные компоненты полей определяют подстановкой (26)–(29) в (8) и (9), соответственно.

На этом завершено формальное решение задачи. Дальнейшее исследование влияния кругового импедансного цилиндра на поле сторонних токов может производиться на основе теорий вычетов, функции комплексного переменного или численными способами вычисления несобственных интегралов.

$$E_{z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{h=-\infty}^{\infty} \left[e^{-ihz - in\phi} C_{n}^{\Pi}(h) F_{2}^{9}(h) H_{n}^{(2)}(\nu_{1}r) \right] dh, \tag{26}$$

$$H_{z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{h=-\infty}^{\infty} \left[e^{-ihz - in\phi} D_{n}^{\Pi}(h) F_{2}^{M}(h) H_{n}^{(2)}(\nu_{1}r) \right] dh, \tag{27}$$

$$E_{z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{h=-\infty}^{\infty} \left[e^{-ihz - in\phi} \begin{cases} J_{n}(vr)(C_{n}^{o}(h)F_{2}^{\circ}(h) + F_{1}^{\circ}(h)) \\ F_{2}^{\circ}(h)(C_{n}^{o}(h)J_{n}(vr) + H_{n}^{(2)}(vr)) \end{cases} \right] dh \quad \text{при } r < r',$$
 (28)

$$H_{z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{h-\infty}^{\infty} \left[e^{-ihz - in\phi} \begin{cases} J_{n}(vr)(D_{n}^{o}(h)F_{2}^{\mathsf{M}}(h) + F_{1}^{\mathsf{M}}(h)) \\ F_{2}^{\mathsf{M}}(h)(D_{n}^{o}(h)J_{n}(vr) + H_{n}^{(2)}(vr)) \end{cases} \right] dh \text{ при } r < r'.$$
 (29)

Выбор конкретного метода вычисления определяется ограничениями, вводимыми для описания электродинамической модели, требуемой точностью расчетных данных и формой их представления.

3. Приближенное решение задачи для дальней зоны излучения

Решения задач о возбуждении поля сторонними токами с произвольной пространственной ориентацией, представленные ранее, носят формальный характер, хотя и охватывают весь возникающий спектр электромагнитных волн, но не пригодны для численной оценки поля.

Для приведения выражений (26) и (27) к удобному с точки зрения вычисления виду необходимо произвести анализ несобственных интегралов в плоскости комплексной переменной h.

С целью унификация решения несобственные интегралы (26) и (27) записывают в виде:

$$u_{\text{внеш}}(r,z) = e^{-in\phi} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(h) H_n^{(2)}(\nu_1 r) e^{-ihz} dh, r > a, (30)$$

при

$$f_2(h) = \frac{D_2(h)F_2^{3,M}(h)}{D_0(h)},\tag{31}$$

где $D_0(h)$ – детерминант системы (20) или (21), получаемый при отбрасывании свободных членов, (знаменатель дробей в (22)–(23)); $D_2(h)$ – детерминант системы при замещении членов содержащих $C_n^{\Pi}(v)$ и $D_n^{\Pi}(v)$ на соответствующие свободные члены (числитель дробей (22) или (23)).

Анализ поля в дальней зоне излучения проводят в сферической системе координат (32) и, применяя асимптотическое выражение функции Ханкеля (33), интеграл (30) с учетом (32) и (33) записывают в виде:

$$z = \rho \cos \theta$$
, $r = \rho \sin \theta$, (32)

$$H_n^{(2)}(\nu_1 r)\big|_{r\to\infty} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i(2n+1)\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu_1 r}} e^{-\nu_1 r},$$
 (33)

$$u_{\text{внеш}}(\rho,\theta) = e^{-in\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(h) e^{-ik_1 \rho \psi(h)} dh, \qquad (34)$$

где $\Phi(h)=rac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot e^{i(2n+1)rac{\pi}{4}}}{\sqrt{
u_1
ho\sin\theta}}f_2(h)$ – предэкспоненциальная функция; $\psi(h)=rac{h}{k_1}\cos\theta+rac{\nu_1}{k_1}\sin\theta$ – фаза.

Асимптотическое выражение интеграла (34) посредством метода стационарной фазы [5] принимает вид:

$$u_{\text{внеш}}(\rho, \theta) = \sqrt{\frac{2\pi i}{k_1 \rho} \frac{\Phi(h_s)}{\sqrt{\psi''(h_s)}}} e^{-ik_1 \rho \psi(h_s)},$$
 (35)

где h_s – точка стационарной фазы, определяемая как корень уравнения $\psi'(h)=0$ (штрих означает

первую производную функции), решение которого определяется по выражению:

$$h_s = k_1 \cos \theta. \tag{36}$$

Асимптотическое выражение несобственного интеграла (30) при $v_1 r \gg 1$ с учетом (35) принимает вид:

$$u_{\text{внеш}}(\rho,\theta) \approx i^n 2e^{-in\phi} \frac{e^{-ik\rho}}{\rho} f_2(h_s).$$
 (37)

Таким образом, влияние цилиндрической неоднородности на поле стороннего источника в дальней зоне излучения оказывается в искажении его характеристики направленности.

Приближенные выражения для расчета продольных компонент поля сторонних источников внутри бесконечного проводящего цилиндра в дальней зоне излучения с учетом (30), (31), (36) и (37) принимают вид:

$$E_{z}^{3} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{n} 2e^{-in\phi} \frac{e^{-ik_{1}\rho}}{\rho} C_{n}^{\pi}(k_{1}\cos\theta) F_{2}^{3}(k_{1}\cos\theta), \quad (38)$$

$$H_{z}^{M} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{n} 2e^{-in\phi} \frac{e^{-ik_{1}\rho}}{\rho} D_{n}^{\Pi}(k_{1}\cos\theta) F_{2}^{M}(k_{1}\cos\theta).$$
 (39)

Поперечные компоненты поля в дальней зоне вычисляют по формулам (8) и (9) с учетом замены (36), выражения которых принимают вид:

– в цилиндрической системе координат для полей класса $\boldsymbol{E}(H_z=0)$ выражения (40) и для полей класса $\boldsymbol{H}(E_z=0)$ выражения (41):

$$E_r^9 = -\text{ctg}\theta \ E_z^9, H_r^9 = 0, E_{\phi}^9 = 0, H_{\phi}^9 = \frac{-\omega \varepsilon'_{1a}}{k_1 \sin \theta} E_z^9, \quad (40)$$

$$\begin{split} E_r^{\mathrm{M}} &= 0, H_r^{\mathrm{M}} = -\mathrm{ctg}\theta \, H_z^{\mathrm{M}}, \\ E_{\Phi}^{\mathrm{M}} &= \frac{\omega \mu'_{1\mathrm{a}}}{k_1 \mathrm{sin}\theta} H_z^{\mathrm{M}}, H_{\Phi}^{\mathrm{3}} = \frac{-\omega \epsilon'_{1\mathrm{a}}}{k_1 \mathrm{sin}\theta} E_z^{\mathrm{3}}, \end{split} \tag{41}$$

– в сферической системе координат для полей класса $\boldsymbol{E}(H_z=0)$ выражения (42) и для полей класса $\boldsymbol{H}(E_z=0)$ выражения (43):

$$E_{\theta}^{\mathfrak{I}} = -\frac{E_{z}^{\mathfrak{I}}}{\sin\theta}, H_{\rho}^{\mathfrak{I}} = 0, E_{\phi}^{\mathfrak{I}} = 0, H_{\phi}^{\mathfrak{I}} = \frac{-\omega \varepsilon_{a}'}{k \sin\theta} E_{z}^{\mathfrak{I}}, \quad (42)$$

$$E_{\rho}^{M} = 0, H_{\theta}^{M} = -\frac{H_{z}^{M}}{\sin \theta}, E_{\phi}^{M} = \frac{\omega \mu'_{a}}{k_{1} \sin \theta} H_{z}^{M}, H_{\phi}^{M} = 0.$$
 (43)

Для полей смешанного класса необходимо просуммировать (40) и (41), (42) и (43).

4. Поле продольного электрического диполя в дальней зоне излучения

Далее приведено решение задачи об излучении в волновой зоне продольного электрического диполя, расположенного в бесконечно длинном круговом цилиндре радиуса *а* с потерями (см. рисунок 1). Электрический диполь ориентирован параллельно оси *z*, на расстоянии *b* от оси цилиндра. Макроскопическая среда внутри цилиндрической

области характеризуется волновым числом k, за его пределами – безграничная изотропная с волновым числом k_1 .

Плотность тока продольного электрического диполя посредством дельта-функции Дирака записывают следующим образом [1]:

$$j_z^3(r', \phi', z') = \frac{I_0^3 l}{r'} \delta(r' - b)\delta(\phi' - 0)\delta(z' - 0).$$
 (44)

Тогда коэффициенты возбуждения (4) с учетом (39) и (43) принимают вид:

$$F_{2}^{9}(k_{1}\cos\theta) = \frac{1}{8\pi i} \frac{k^{2} - (k_{1}\cos\theta)^{2}}{i\omega\epsilon'_{a}} \frac{I_{0}^{3}l}{b} \times \times J_{n}(-ib\sqrt{(k_{1}\cos\theta)^{2} - k^{2}}) = = \frac{1}{8\pi i} \frac{k^{2}}{i\omega\epsilon'_{a}} \frac{I_{0}^{3}l}{b} J_{n}(kb) \Big|_{\theta = \frac{\pi}{2}},$$
(45)

$$F_2^{\mathsf{M}}(k_1 \cos \theta) = 0. \tag{46}$$

Таким образом, продольный электрический диполь в рассматриваемой электродинамической системе возбуждает электромагнитное поле класса *E*.

Выражение (6) с учетом замены (36) записывают следующим образом:

$$\nu = -i\sqrt{(k_1 \cos\theta)^2 - k^2},\tag{47}$$

$$v_1 = k_1 \sin\theta, \tag{48}$$

а поверхностные импедансы цилиндрической поверхности:

$$Z^{9} = \frac{k^{2} - (k_{1}\cos\theta)^{2}}{(k_{1}\sin\theta)^{2}} \frac{{\varepsilon_{a1}}'}{{\varepsilon_{a}}'},$$
(49)

$$Z^{M} = \frac{k^{2} - (k_{1}\cos\theta)^{2} \mu_{a1}'}{(k_{1}\sin\theta)^{2} \mu_{a'}'}.$$
 (50)

Коэффициент прохождения $C_n^{\Pi}(h)$ вычисляют с учетом (44)–(50).

Анализ выражений (38) и (42) показывает, что характеристика направленности аксиального электрического диполя, расположенного внутри цилиндра, эквивалентна характеристике направленности диполя в однородном пространстве: искажения наблюдаются в экваториальной плоскости (z=0) по мере удаления источника от оси цилиндра.

Далее оценка характеристики направленности производится в поперечной относительно цилиндра плоскости (в сферической системе координат $\theta = \pi/2$) (см. рисунок 1).

В поперечной плоскости цилиндра ($\theta = \pi/2$) поверхностные импедансы (49), (50) и коэффициенты прохождения (22), (23) принимают вид:

$$Z^{9} = \frac{k^{2} \, \varepsilon_{a1}^{\prime}}{k_{1}^{2} \, \varepsilon_{s}^{\prime}},\tag{51}$$

$$Z^{\rm M} = \frac{k^2}{k_1^2} \frac{{\mu_{\rm a1}}'}{{\mu_{\rm a}}'},\tag{52}$$

$$C_n^{\Pi}(k_1 \cos \theta) = \frac{J_n(ka)}{J_n(k_1 a)} \frac{Z - Y}{Z_1 - Z^9 Y} \bigg|_{\theta = \frac{\pi}{2}},$$
 (53)

$$D_n^{\Pi}(k_1 \cos \theta) = \frac{J_n(ka)}{J_n(k_1 a)} \frac{Z - Y}{Z_1 - Z^{M}Y} \bigg|_{\theta = \frac{\pi}{2}},$$
 (54)

$$Z = \frac{H_n^{(2)}(ka)}{H_n^{(2)}(ka)}, \ Y = \frac{J_n'(ka)}{J_n(ka)}, \ Z_1 = \frac{H_n^{(2)}(k_1a)}{H_n^{(2)}(k_1a)}.$$
 (55)

После подстановки (51) и (53) в (38) продольная компонента вектора напряженности электрического поля в дальней зоне принимает вид:

$$E_{z}^{3} = \frac{1}{4\pi} \frac{k^{2}}{i\omega\varepsilon_{a}'} \frac{I_{0}^{3}l}{b} \frac{e^{-ik_{1}\rho}}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{n} i^{n} e^{-in\phi} J_{n}(kb) \times \frac{J_{n}(ka)H_{n}^{(2)'}(ka) - J_{n}'(ka)H_{n}^{(2)}(ka)}{J_{n}(ka)H_{n}^{(2)'}(k_{1}a) - Z^{3}J_{n}'(ka)H_{n}^{(2)}(k_{1}a)},$$
(56)

где ε_n – число Неймана ($\varepsilon_n=1$ при n=0 и $\varepsilon_n=2$ при $n\neq 0$).

Поперечные компоненты поля вычисляют посредством (40) или (42). Выражение (56) справедливо для любых размеров цилиндра.

В случае малого электрического радиуса цилиндра, когда $k_1a \ll 1$ и $kb \ll 1$, учитывая степенные разложения функций Бесселя первого и второго рода для малых значений аргумента (57), выражения (55) примут вид (58), а коэффициенты (53) и (54) – вид (59) и (60), соответственно:

$$J_n(x) \approx \frac{(x/2)^n}{\Gamma(n+1)}, \quad H_n^{(2)} \approx -\frac{1}{i\pi}\Gamma(n)(x/2)^{-n},$$
 (57)

$$Z = Z_1 = -\frac{n}{x}, \quad Y_1 = \frac{n}{x'} \tag{58}$$

$$C_n^{\pi}(k_1 \cos \theta) = \left(\frac{k}{k_1}\right)^n \frac{2}{1 + Z^3}\Big|_{\theta = \overline{L}'}$$
 (59)

$$D_n^{\Pi}(k_1 \cos \theta) = \left(\frac{k}{k_1}\right)^n \frac{2}{1 + Z^{M}}\Big|_{\theta = \frac{\pi}{2}}.$$
 (60)

Запись продольной компоненты (56) в дальней зоне для случая электрически малого радиуса цилиндра с учетом (57) – (60) принимает вид:

$$E_z^3 = \frac{I_0^3 l k^2}{4\pi\omega \varepsilon_a' b} \frac{e^{-ik_1\rho}}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos(n\phi) f_n^{\text{прод}}, \tag{61}$$

где

$$f_n^{\text{прод}} = i^{n-1} \frac{(kb)^n}{2^n n!} \left(\frac{k}{k_1}\right)^n \frac{2}{1 + \frac{k^2}{k_1^2} \frac{\epsilon_{a1}'}{\epsilon_{a1}'}}.$$
 (62)

Сравнение результатов расчета по выражениям (61) и (56) показывают, что приемлемая точность представления (61) сохраняется при величине электрического радиуса цилиндра $k_1 a \leq 0,1\lambda$.

5. Результаты численного исследования поля аксиального электрического диполя в дальней зоне излучения

Рисунок 2 иллюстрирует диаграмму направленности аксиального (продольного) электрического диполя, расположенного в изотропном диэлектрическом цилиндре (плоскость $\mathbf{z} = 0$ цилиндрической системы координат показанной на рисунке 1). Расчет выполнен по выражению (56) для следующих значений: относительная комплексная диэлектрическая проницаемость цилиндра $\mathbf{\epsilon}' = 10$; относительная комплексная диэлектрическая проницаемость окружающего пространства $\mathbf{\epsilon}'_1 = 1$; электрический радиус цилиндра $k_1 a = \pi$; электрический диполь смещен относительно центра цилиндра вдоль оси $\mathbf{\phi} = 0$ на расстояние $\mathbf{b} = 0.4a$.

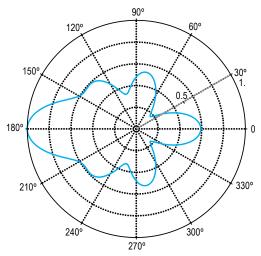


Рис. 2. Диаграмма направленности продольного электрического диполя

Fig. 2. Directivity Pattern of a Longitudinal Electric Dipole

С целью анализа влияния цилиндрической неоднородности на поле продольного электрического диполя в зоне излучения выполнена серия численных экспериментов, условия аналогичны указанным ранее. При этом радиальная координата стороннего тока изменялась в пределах от b=0.1a до b=0.99a с шагом 0.1a, результаты расчетов представлены на рисунке 3.

Продольный электрический диполь, расположенный внутри диэлектрического цилиндра, возбуждает на его поверхности только продольные токи. Распределение поверхностных токов определяется электрическими параметрами цилиндра и расположением стороннего тока относительно его оси. Вследствие чего диаграмма направленности характеризуется резкими осцилляциями, интенсивность которых увеличивается по мере удаления источника от оси цилиндра. Максимум диаграммы направленности наблюдается в противоположном относительно перемещения источника направлении.

Ряд, входящий в выражение (56) – сходящийся, скорость его сходимости определяется электрическим радиусом цилиндра. В [1] сформулировано

практическое правило по ограничению суммы членов ряда, при котором обеспечивается приемлемая с практической точки зрения погрешность вычислений: следует учитывать число членов ряда, не превышающее величины $2k_1=a$ при вычислении поля в зоне излучения и 2kb- в ближней зоне

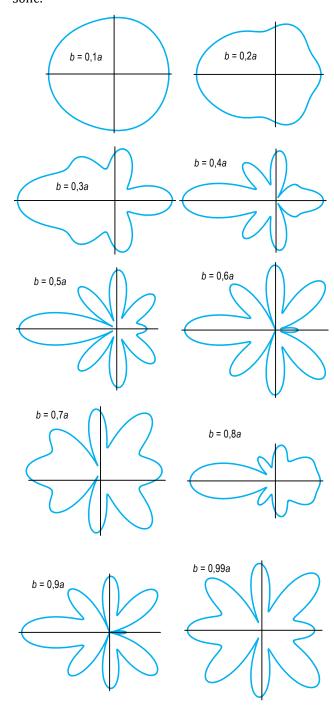


Рис. 3. Эволюция диаграммы направленности продольного электрического диполя

Fig. 3. The Evolution of the Directivity Pattern of a Longitudinal Electric Dipole

С целью иллюстрации данного правила, на рисунке 4 представлены диаграммы направленности исследуемой электродинамической модели с уче-

том удержания ограниченного числа членов ряда в выражении (56). В соответствии с приведенным правилом достаточное количество членов ряда $n=2k_1a=2\pi\approx 6,28,$ что подтверждается численными расчетами.

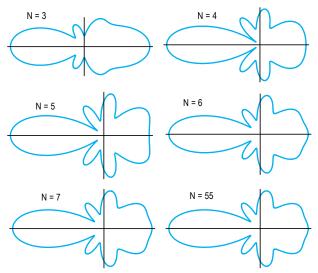


Рис. 4. К вопросу о сходимости ряда

Fig. 4. To the Question of the Convergence of a Series

Решение задачи о возбуждении кругового бесконечного импедансного цилиндра внутренним продольным магнитным током возможно получить посредством метода перестановочной двойственности. При этом продольная компонента поля описывается путем замены $E_z^{\mathfrak{I}} \to H_z^{\mathfrak{M}}$, $\epsilon \to -\mu$, $I_0^{\mathfrak{I}} \to I_0^{\mathfrak{M}}$ и $Z^{\mathfrak{I}} \to Z^{\mathfrak{M}}$.

В случае распределения сторонних токов, отличного от рассмотренных, необходимо задать их

объемную плотность в виде (44), на основе выражений (4) и (5) вычислить коэффициенты возбуждения, определить продольные компоненты поля по формулам (26)–(29), а поперечные – (8) и (9).

Заключение

Полученные в ходе решения задачи аналитические выражения определяют все компоненты электромагнитного поля как для ближней, так и для дальней зон излучения в формальном виде.

Представление распределения сторонних токов посредством функции Грина дает основания для нахождения численных значений коэффициентов возбуждения импедансного цилиндра для произвольного распределения объемной плотности сторонних токов либо в аналитическом виде, либо в численном.

Представленное приближенное решение задачи позволяет вычислить электромагнитное поле импедансного цилиндра, возбуждаемого внутренними сторонними токами произвольного распределения в дальней (волновой) зоне излучения.

В результате численного моделирования излучения продольного электрического диполя, размещенного внутри диэлектрического цилиндра, установлено, что: диаграмма направленности рассматриваемой модели носит лепестковый характер, распределение лепестков и максимум излучения определяются параметрами смещения источника относительно оси цилиндра и электрическими размерами цилиндра.

Список используемых источников

- 1. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 296 с.
- 2. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
- 3. Уэйт Д.Р. Электромагнитное излучение из цилиндрических систем. М.: Сов. радио, 1962. 239 с.
- 4. Каценеленбаум Б.З. Высокочастотная электродинамика. М.: Наука, 1966. 240 с.
- 5. Габриэльян Д.Д., Звездина М.Ю., Костенко П.И. Возбуждение импедансной поверхности цилиндра продольным электрическим диполем // Журнал радиоэлектроники. 2000. № 6. URL: http://jre.cplire.ru/win/jun00/6/text.html (дата обращения 14.07.2021)
- 6. Габриэльян Д.Д., Звездина М.Ю., Звездина Ю.А., Костенко П.И., Марченко С.Н. Возбуждение импедансной поверхности цилиндра поперечным электрическим диполем // Журнал радиоэлектроники. 2000. № 10. URL: http://jre.cplire.ru/win/oct00/6/text.html (дата обращения 14.07.2021)
- 7. Габриэльян Д.Д., Звездина М.Ю., Костенко П.И. Влияние импедансной поверхности кругового цилиндра на диаграмму направленности электрического диполя // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45. № 10. С. 1194–1197.
- 8. Каценеленбаум Б.З. Возбуждение поверхностных волн при дифракции на импедансном круговом цилиндре // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54. № 3. С. 308–313.
- 9. Бичуцкая Т.И., Макаров Г.И. Дипольные излучатели вблизи полуцилиндра // Радиотехника и электроника. 2010. Т. 55. № 12. С. 1447–1456.
- 10. Бичуцкая Т.И., Макаров Г.И. Поле линейных излучателей вблизи полуцилиндра // Радиотехника и электроника. 2010. Т. 55. № 5. С. 517–530.
- 11. Бичуцкая Т.И., Макаров Г.И. Цилиндрическая неоднородность на полупространстве и эквивалентные излучатели // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 58. № 3. С. 225–232. DOI:10.7868/S0033849413030030
- 12. Бичуцкая Т.И., Макаров Г.И. Полуцилиндр с полостью на идеально проводящей плоскости вблизи линейного излучателя // Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60. № 1. С. 3–13. DOI:10.7868/S0033849415010027

* * *

Excitation of the Round Infinite Impedance Cylinder by Internal Extrinsic Current: Far-Field Radiation

M. Protsenko¹

¹The Bonch-Bruevich Saint-Petersburg State University of Telecommunications, St. Petersburg, 193232, Russian Federation

Article info

DOI:10.31854/1813-324X-2021-7-3-47-54 Received 10th Jule 2020 Accepted 12th Jule 2021

For citation: Protsenko M. Excitation of the Round Infinite Impedance Cylinder by Internal Extrinsic Current: Far-Field Radiation. *Proc. of Telecom. Universities.* 2021;7(2):47–54. (in Russ.) DOI:10.31854/1813-324X-2021-7-3-47-54

Abstract: The paper considers the method of solving the problem of excitation a circular infinite impedance cylinder by means of extrinsic current with an arbitrary spatial orientation. The formal solution of the problem is based on the method of expanding the fields in a complete system of eigenfunctions. Arbitrary distribution of extrinsic currents is taken into account factors excitation. An approximate solution of the problem in the far field is presented. The effect of a dielectric cylinder on the directional diagram of an axial electric dipole is studied.

Keywords: cylinder, impedance cylinder, excitation cylinder, cylindrical coordinates, the electromagnetic field, extrinsic current, near field radiation, far-field radiation.

References

- 1. Markov G.T., Chaplin A.F. Excitation of Electromagnetic Waves. Moscow: Radio i svyaz' Publ.; 1983. 296 p. (in Russ.)
- 2. Vajnshtejn L.A. Electromagnetic Waves. Moscow: Radio i svyaz' Publ.; 1988. 440 p. (in Russ.)
- 3. Uehjt D.R. Electromagnetic Radiation From Cylindrical Systems. Moscow: Sov. Radio Publ.; 1962. 239 p. (in Russ.)
- 4. Kacenelenbaum B.Z. High-Frequency Electrodynamics. Moscow: Nauka Publ.; 1966. 240 p. (in Russ.)
- 5. Gabrielian D.D., Zvezdina M.Yu., Kostenko P.I. Excitation of the Impedance Surface of the Cylinder by a Longitudinal Electric Dipole. *Journal of Radio Electronics*. 2000;6. (in Russ.) Available from: http://jre.cplire.ru/win/jun00/6/text.html [Accessed 14th July 2021]
- 6. Gabrielian D.D., Zvezdina M.Yu., Zvezdina Yu.A., Kostenko P.I., Marchenko S.N. Excitation of the Impedance Surface of the Cylinder by a Transverse Electric Dipole. *Journal of Radio Electronics*. 2000;10. (in Russ.) Available from: http://jre.cplire.ru/win/oct00/6/text.html [Accessed 14th July 2021]
- 7. Gabrielian D.D., Zvezdina M.Yu., Kostenko P.I. Influence of the Impedance Surface of a Circular Cylinder on the Directional Diagram of an Electric Dipole. *Journal of Communications Technology and Electronics*. 2000;45(10):1194–1197. (in Russ.)
- 8. Kacenelenbaum B.Z. Excitation of Surface Waves by Diffraction by an Impedance Circular Cylinder. *Journal of Communications Technology and Electronics*. 2009;549(3):308–313. (in Russ.)
- 9. Bichutskaia T.I., Makarov G.I. Dipole Radiators Near a Half-Cylinder. *Journal of Communications Technology and Electronics*. 2010;55(12):1447–1456. (in Russ.)
- 10. Bichutskaya T.I., Makarov G.I. The Field of Linear Emitters Near the Half-Cylinder. *Journal of Communications Technology and Electronics*. 2010;55(5):517–530. (in Russ.)
- 11. Bichutskaya T.I., Makarov G.I. Cylindrical Irregularity on a Half-Space and Equivalent Radiators. *Journal of Communications Technology and Electronics*. 2013;58(3):196–202. (in Russ.) DOI:10.7868/S0033849413030030
- 12. Bichutskaya T.I., Makarov G.I. A Hollow Semicylinder Located On A Perfectly Conducting Plane Near A Filament Radiator. *Journal of Communications Technology and Electronics*. 2015;60(1). (in Russ.) DOI:10.7868/S0033849415010027

Сведения об авторе:

ПРОЦЕНКО Михаил Сергеевич кандидат технических наук, профессор кафедры радиорелейной, тропосферной и спутниковой связи Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, protsenkoms@gmail.com